Test de normalité pour les résidus d'un modèle ARMA

Pierre LAFAYE DE MICHEAUX

Jury: A.BERLINET, G.CARAUX, G.DUCHARME,
J.D.LEBRETON, R.SABATIER, J.P.VILA

Juin 1998

Résumé

Le recours à un modèle stochastique de type ARMA dans un but de prévision nécessite un traitement préalable dont la paternité est attribuée à Box et Jenkins.
Leur procédure se déroule en trois étapes: une étape d'identification ou choix des ordres p et q du modèle ARMA, une deuxième étape d'estimation des paramètres du modèle et enfin une troisième étape dite de validation qui cherche à savoir si le modèle choisi dans la phase d'identification et dont les paramètres ont été estimés peut être considéré comme valable.
Les résidus $\{\epsilon_t\}$ calculés à partir du modèle estimé jouent un rôle important dans cette dernière étape: peuvent-ils être considérés comme la réalisation d'un bruit blanc? suivent-ils une loi normale?
Le test le plus courant est dû à Box et Pierce: il s'agit du test du portmanteau. Toutefois, ce test est plus adapté dans la pratique à la détection de modèles insatisfaisant qu'à la sélection du meilleur modèle parmi plusieurs compétiteurs.
Or, si on peut faire l'hypothèse de normalité pour le bruit blanc du modèle ARMA défini, alors on peut en tirer de nombreux avantages tels une estimation de l'erreur quadratique moyenne ou des intervalles de confiance asymptotiques plus fiables pour des tailles d'échantillon finies. Il serait donc profitable de disposer d'un test voué à la détection de cette normalité.
Le test de normalité décrit dans ce document se veut une solution à ce problème. Il s'appuie sur la théorie des tests lisses de Neyman et propose une alternative intéressante au test portmanteau. Il pourrait être utilisé au cours de la procédure de Box et Jenkins pour sélectionner les meilleurs modèles en terme de normalité des résidus.

Mots-clés: Tests portmanteaux, Bruit blanc, Résidus, Test de normalité, Validation, ARMA

Abstract

The results contained in this document cast a new light on the important problem of testing the residuals of an ARMA model. Indeed, the validation stage when fitting a model to data, is the determinant step in selecting the best model. The Box and Jenkins's three stages method ends with the validation step which requires the portmanteau test. An advantage of such portmanteau tests is that they pool information from the correlations at different lags. However, a real disadvantage is that they frequently fail to reject poorly fitting models. In practice, they are more useful for disqualifying unsatisfactory models than for selecting the best-fitting model among closely competing candidates.
We need to stress that if it can be assumed that the white noise process of an ARMA process is Gaussian, then stronger conclusions can be drawn from the fitted model. For example, not only is it possible to specify an estimated mean squarred error for predicted values, but asymptotic prediction confidence bounds can also be computed. This being so, we propose to replace the portmanteau test with the one we developp here which is targeted at testing normality.

Key-words: Portmanteaux-tests, White noise, Residuals, Goodness of fit, Diagnostic checking, ARMA

La rédaction d'un mémoire est toujours une entreprise de longue haleine qui ne peut être menée à bien sans le soutien de son entourage professionnel et familial ...

Tout d'abord, je tiens à remercier A.Berlinet et M.Cuer pour leurs apports bibliographiques.

Je remercie aussi R.Sabatier, P.Neveu et B.Charnomordic pour leurs conseils informatiques.

J'adresse enfin mes plus sincères remerciements à G.Ducharme pour m'avoir confié ce travail passionnant, et pour la liberté d'initiative et le soutien actif qu'il m'a apporté.

Je dédie cet ouvrage à Domi et Fabien...

Table des matières

Introduction

La procédure d'ajustement d'un modèle statistique ne peut être complète sans une étude des résidus du modèle. Cette étude permet de s'assurer que le modèle ajuste correctement les données, que les hypothèses validant l'inférence statistique tiennent et qu'il ne subsiste pas de structure qui n'ait été prise en compte.

Dans le cas où les résidus sont indépendants, cette étude peut se faire par l'examen de graphiques des résidus et par l'emploi de certains tests statistiques. Malheureusement, dans bien des cas comme lors de l'utilisation de méthodes appliquées aux séries chronologiques, cette étude est compliquée du fait que les résidus ont une structure de dépendance dont il est difficile d'apprécier le comportement visuellement. Il est donc important de pouvoir compter sur des tests statistiques qui permettent de valider objectivement l'ajustement offert par le modèle.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux modèles de type ARMA et au moyen de valider l'hypothèse de normalité de leurs résidus.
Dans ce contexte, les tests existant, essentiellement l'examen de graphiques, sont difficiles à utiliser.
Nous nous attachons donc à construire un test d'adéquation pour les résidus d'un modèle ARMA. Cette construction, de nature théorique, est ensuite validée par des simulations informatiques.

Le test obtenu est adapté à la vérification de la normalité des résidus, et offre une alternative intéressante aux rares tests existants comme " les test portmanteaux " [1].

1. cf. annexe 1

Chapitre 1

Les modèles ARMA

Les modèles ARMA interviennent dans l'étude de phénomènes dépendant du temps, comme les séries chronologiques, et permettent de prédire la valeur d'une variable à un instant t en tenant compte des valeurs qu'elle prenait aux instants antérieurs.

Dans ce chapitre, nous allons introduire ces modèles ARMA et donner quelques unes de leurs propriétés qui seront utilisées par la suite.

1.1 Généralités

Dans cette section, nous allons définir les modèles ARMA.

Définition 1. *Processus*
Un processus sur l'ensemble des entiers relatifs est une famille de variables aléatoires $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ *chacune étant définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 2. *Processus stationnaire*
Un processus $(Y_t; t \in \mathbb{Z})$ *est dit stationnaire si*

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{Z}, EY_t^2 < \infty, \\ &\forall t \in \mathbb{Z}, EY_t = m \text{ indépendant de } t, \\ &\forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}, Cov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma(h) \text{ indépendant de } t. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La stationnarité définie comme ci-dessus est souvent appelée stationnarité faible ou stationnarité du second ordre.
C'est le type de stationnarité auquel on fera toujours référence dans ce travail.

Définition 3. *Fonction d'autocovariance*

Soit $(Y_t, t \in T)$ un processus tel que $Var(Y_t) < \infty \; \forall t \in T$.
Alors la fonction d'autocovariance $\gamma_Y(.,.)$ de $\{Y_t\}$ est définie par

$$\gamma_Y(r,s) = Cov(Y_r, Y_s) = E[(Y_r - EY_r)(Y_s - EY_s)], \qquad r,s \in T \tag{1.2}$$

Notons que si $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire, alors $\gamma_Y(r,s) = \gamma_Y(r-s,0)$ quelque soit $r,s \in \mathbb{Z}$. On peut alors redéfinir la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire comme étant la fonction d'une seule variable

$$\gamma_Y(h) \overset{N}{=} \gamma_Y(h,0) \qquad \forall h \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

Le théorème suivant donne un résultat utile pour la suite sur la convergence en probabilité d'un processus stationnaire

Théorème 1. *Si $\{X_t\}$ est un processus stationnaire de moyenne μ, estimée par $\overline{X}_T = T^{-1}(X_1 + \ldots + X_T)$, et de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$, alors quand $T \to \infty$, on a*

$$Var(\overline{X}_T) = E(\overline{X}_T - \mu)^2 \to 0 \qquad si\ \gamma(T) \to 0,$$

et donc

$$\overline{X}_T \xrightarrow{P} \mu \qquad si\ \gamma(T) \to 0\ quand\ T \to \infty.$$

Définition 4. *Bruit blanc*

Un bruit blanc est un processus $\{\epsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ tel que

$$\begin{aligned} &E[\epsilon_t] = 0, \\ &\gamma(h) \overset{N}{=} Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = 0, \\ &Var[\epsilon_t] = \sigma^2 = \gamma(0) < \infty. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Notons que si le bruit blanc ϵ_t suit une loi $N(0,\sigma^2)$ $\forall t$, alors les ϵ_t sont $i.i.d$, car $\gamma(h) = 0$.

Définition 5. *Modèle AR(p)*

On appelle processus autorégressif d'ordre p (AR(p)) un processus stationnaire $(Y_t; t \in \mathbb{Z})$ vérifiant une relation du type

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

où les φ_i sont des réels et où $(\epsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de variance σ^2.

Définition 6. *Modèle MA(q)*

On appelle processus moyenne mobile d'ordre q (MA(q)) un processus $(Y_t; t \in \mathbb{Z})$ *défini par*

$$Y_t = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

où les θ_i *sont des réels et où* $(\epsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ *est un bruit blanc de variance* σ^2.

Définition 7. *Modèle ARMA(p,q)*

On appelle processus autorégressif moyenne mobile d'ordre (p,q) un processus stationnaire $(Y_t; t \in \mathbb{Z})$ *vérifiant une relation du type*

$$Y_t - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \tag{1.7}$$

où les φ_i *et les* θ_i *sont des réels et où* $(\epsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ *est un bruit blanc (ou résidu) de variance* σ^2.

Introduisons les notations suivantes

$$\underset{\sim}{\varphi}^{(p)} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix} \text{ et } \underset{\sim}{\theta}^{(q)} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} = \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} \text{ et } \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(q)}} = \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-q} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Avec ces notations, l'équation générale d'un modèle ARMA(p,q) peut s'écrire sous la forme

$$Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} = \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}} + \epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Cette équation peut aussi être écrite sous la forme

$$\varphi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \tag{1.12}$$

où $\varphi(.)$ et $\theta(.)$ sont les polynômes de degrés p et q

$$\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p \tag{1.13}$$

et

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q \tag{1.14}$$

et où B, appelé "l'opérateur retard" est défini par

$$B^j Y_t = Y_{t-j}, \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.15}$$

Les polynômes φ et θ sont respectivement appelés polynôme autorégressif et polynôme moyenne mobile du modèle ARMA(p,q) défini précedemment.

Définition 8. *Processus causal*
Un processus ARMA(p,q) défini par les équations $\varphi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t$ *est appelé processus causal s'il existe une suite de constantes* $\{\psi_j\}$ *telle que* $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ *et*

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.16}$$

Le théorème suivant caractérise un processus causal.

Théorème 2. *Soit* $\{Y_t\}$ *un processus ARMA(p,q) dont les polynômes* $\varphi(.)$ *et* $\theta(.)$ *n'ont pas de racines communes. Alors* $\{Y_t\}$ *est un processus causal si et seulement si* $\varphi(z) \neq 0$ *pour toute valeur de* $z \in \mathbb{C}$ *telle que* $|z| \leqslant 1$.

Définition 9. *Processus inversible*
Un processus ARMA(p,q) défini par les équations $\varphi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t$ *est appelé processus inversible s'il existe une suite de constantes* $\{\delta_j\}$ *telle que* $\sum_{j=0}^{\infty} |\delta_j| < \infty$ *et*

$$\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j Y_{t-j} \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.17}$$

Le théorème suivant caractérise un processus inversible.

Théorème 3. *Soit* $\{Y_t\}$ *un processus ARMA(p,q) dont les polynômes* $\varphi(.)$ *et* $\theta(.)$ *n'ont pas de racines communes. Alors* $\{Y_t\}$ *est un processus inversible si et seulement si* $\theta(z) \neq 0$ *pour toute valeur de* $z \in \mathbb{C}$ *telle que* $|z| \leqslant 1$.

1.2 Estimation des paramètres d'un modèle ARMA(p,q)

Dans cette section, nous allons trouver les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres $\underset{\sim}{\varphi}^{(p)} = (\varphi_1, \dots \varphi_p)'$, $\underset{\sim}{\theta}^{(q)} = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$, et σ^2 d'un modèle ARMA(p,q) [1]. Pour ce faire, on suppose que l'on a accès à la sous-suite $\{Y_i,\ \ i = 1, \dots, T\}$ de variables aléatoires d'un processus ARMA(p,q).

Définissons d'abord les variables aléatoires $\{\hat{Y}_i,\ \ i = 1, \dots, T\}$ par le système

$$\begin{cases} \hat{Y}_1 = 0 \\ \hat{Y}_{i+1} = \sum\limits_{j=1}^{i} \theta_{ij} \left(Y_{i+1-j} - \hat{Y}_{i+1-j}\right) \quad 1 \leqslant i \leqslant m = max(p,q) \\ \hat{Y}_{i+1} = \varphi_1 Y_i + \cdots + \varphi_p Y_{i+1-p} + \sum\limits_{j=1}^{q} \theta_{ij} \left(Y_{i+1-j} - \hat{Y}_{i+1-j}\right) \quad i \geqslant m \end{cases} \tag{1.18}$$

dans lequel les quantités θ_{ij} sont déterminées par le second système

$$\begin{cases} v_0 = \tau(1,1) \\ \theta_{n,n-k} = v_k^{-1} \left(\tau(n+1,k+1) - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j}v_j\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ v_n = \tau(n+1,n+1) - \sum\limits_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \end{cases} \tag{1.19}$$

que l'on résoud récursivement dans l'ordre
$v_0, \theta_{11}, v_1, \theta_{22}, \theta_{21}, v_2, \theta_{33}, \theta_{32}, \theta_{31}, v_3, \dots$ et dans lequel on définit $\tau(i,j)$ par

$$\tau(i,j) = \begin{cases} \sigma^{-2}\gamma_Y(i-j) \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant m \\ \sigma^{-2} \left[\gamma_Y(i-j) - \sum\limits_{r=1}^{p} \varphi_r \gamma_Y(r - |i-j|)\right] \ min(i,j) \leqslant m < max(i,j) \leqslant 2m \\ \sum\limits_{r=0}^{q} \theta_r \theta_{r+|i-j|} \qquad min(i,j) > m \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases} \tag{1.20}$$

1. Voir l'annexe 2 pour le cas plus simple du modèle AR(p)

avec $\theta_j = 0$ pour $j > q$ et $\theta_0 = 1$.
De plus, dans (1.20), $\gamma_Y(.)$ est donnée par

$$\gamma_Y(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|} \tag{1.21}$$

où les ψ_j sont déterminés par

$$\begin{cases} \psi_0 = \theta_0 = 1 \\ \psi_1 = \theta_1 + \psi_0\varphi_1 = \theta_1 + \varphi_1 \\ \psi_2 = \theta_2 + \psi_0\varphi_2 + \psi_1\varphi_1 = \theta_2 + \varphi_2 + \theta_1\varphi_1 + \varphi_1^2 \\ \quad\quad \vdots \end{cases} \tag{1.22}$$

ou encore par

$$\begin{cases} \psi_j - \sum\limits_{0<k\leqslant j} \varphi_k \psi_{j-k} = \theta_j & 0 \leqslant j < max(p, q+1) \\ \psi_j - \sum\limits_{0<k\leqslant j} \varphi_k \psi_{j-k} = 0 & j \geqslant max(p, q+1) \end{cases} \tag{1.23}$$

Définissons aussi $r_t = \frac{v_t}{\sigma^2}$.

Avec ces notations, la fonction de vraisemblance de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_T)'$ est donnée par (Brockwell et Davis, 1990, p256)

$$L\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}, \underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \sigma^2\right) = \\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} (r_0 \ldots r_{T-1})^{-\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^{-2} \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2}{r_{t-1}}\right]. \tag{1.24}$$

De cette expression, on déduit que l'estimateur de vraisemblance maximale de σ^2 est donné par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} S\left(\underset{\sim}{\hat{\varphi}}^{(p)}, \underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(q)}\right) \tag{1.25}$$

où

$$S\left(\underset{\sim}{\hat{\varphi}}^{(p)}, \underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(q)}\right) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2}{r_{t-1}} \tag{1.26}$$

et où $\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}, \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)}$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de $\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}, \underset{\sim}{\theta}^{(q)}$ correspondant aux valeurs de ces paramètres qui minimisent

$$l\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}, \underset{\sim}{\theta}^{(q)}\right) = Log\left(\frac{1}{T} S\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}, \underset{\sim}{\theta}^{(q)}\right)\right) + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Log(r_{t-1}). \tag{1.27}$$

Il est facile de se convaincre que ces estimateurs ne possèdent pas de forme explicite et qu'ils doivent être obtenus par une procédure itérative.
Pour initier cette procédure itérative, on peut utiliser les valeurs $\underset{\sim}{\varphi_0}^{(p)}$ et $\underset{\sim}{\theta_0}^{(q)}$ données par Brockwell et Davis, 1990, (8.4 p250).

En outre, Gourrieroux et Monfort (1995, 9.51 p326) montrent que, quand $T \to \infty$, la quantité
$\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right) = \sqrt{T}\begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)} - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)} \\ \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)} \\ \hat{\sigma} - \sigma \end{bmatrix}$ a une distribution limite normale d'espérance 0 et de matrice de variance-covariance correspondant à l'inverse de la matrice d'information de Fisher, et donc[2] que $\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta} = O_p(T^{-\frac{1}{2}})$.

2. voir 14.4-4 et 14.4-2 p476-477 dans Bishop, Fienberg et Holland

Chapitre 2

La stratégie de test

Les résultats du chapitre précédent reposent sur l'hypothèse de normalité des erreurs $\{\epsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ et les qualités des estimateurs obtenus vont dépendre de la justesse de cette hypothèse. Il est donc important de pouvoir disposer d'outils permettant de la vérifier.

Ce chapitre a pour but de décrire la stratégie qui sera utilisée ultérieurement pour mettre au point le test de normalité des erreurs d'un modèle ARMA. Cette stratégie est en fait une adaptation de la stratégie adoptée par Templet (1995) dans son mémoire de DEA au cas qui nous intéresse ici, à savoir les séries chronologiques et plus particulièrement les modèles ARMA. Cette stratégie est quant à elle basée sur la théorie des tests lisses de Neyman que nous allons donc présenter.

2.1 Test lisse de Neyman

L'idée de cette stratégie de test, initialement proposée par Neyman (1937), consiste à emboîter la fonction de densité postulée sous l'hypothèse nulle dans une famille plus générale choisie pour détecter les alternatives les plus probables si H_0 est fausse.

Selon le choix de cette famille d'imbrication, les calculs de la statistique de test sont simples ou complexes. C'est pourquoi Neyman suggère pour celle-ci une famille de type exponentiel.

Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_T)'$ un échantillon $i.i.d$ de loi F et notons F_0 la fonction de répartition de Y_t sous H_0, fonction que l'on suppose pour le moment continue et entièrement spécifiée. La procédure de test débute par la transformation des données $U_t = F_0(Y_t)\ t = 1, \ldots, T$. Si H_0 est vraie, les U_t constituent un échantillon aléatoire issu d'une loi uniforme sur l'intervalle [0,1]. Ainsi sous l'hypothèse nulle, les U_t sont $i.i.d$ de densité

$$f_0(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } u \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Considérons la famille d'alternatives

$$g_K(u,\eta) = \begin{cases} C_K(\eta) exp\left[\sum_{k=1}^{K} \eta_k h_k(u)\right] & \text{si } u \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_K)' \in \mathbb{R}^K$ est un vecteur de paramètres, $C_K(\eta)$ est une constante de normalisation telle que $\int_0^1 g_K(u,\eta)du = 1$, K est un entier donnant l'ordre de l'alternative et h_k est le $k^{ième}$ polynôme de Legendre[1] normalisé sur [0,1].

Ainsi le test de H_0 donné en (2.1) se réduit à tester pour la densité (2.2)

$$H_0 : \eta = 0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \eta \neq 0 \tag{2.3}$$

ce qui peut se faire de plusieurs façons. La statistique de test que propose Neyman est

$$\psi^2_{K,T} = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} V_t\right)'\left(\sum_{t=1}^{T} V_t\right) \tag{2.4}$$

où $V_t = (h_1(U_1), \dots, h_K(U_t))'$.

Puisque $\int_0^1 h_k(u)du = 0$ $k = 1, 2, \dots, K$ et $\int_0^1 h_k(u)h_l(u)du = \delta_k^l$ où δ_k^l est le delta de Kronecker, il en découle, par la version multidimensionnelle du théorème limite central que, sous H_0,

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t \xrightarrow{L} N_K(0, I_K) \tag{2.5}$$

où I_K est la matrice identité d'ordre K. Par conséquent, sous l'hypothèse nulle

$$\psi^2_{K,T} \xrightarrow{L} \chi^2_K, \tag{2.6}$$

la loi du khi-deux avec K degrés de liberté. Ceci induit la stratégie de test qui conduit à rejeter H_0 au profit de H_1 si

$$\psi^2_{K,T} > \chi^2_{K,1-\alpha} \tag{2.7}$$

où $\chi^2_{K,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi χ^2_K.

1. cf. annexe 3

2.2 Test lisse de Normalité

Templet (1995) s'est inspirée de l'approche de Neyman et a considéré le contexte de régression non linéaire

$$Y_i = \Psi(x_i, \theta) + \epsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

dans lequel chaque Y_i est la valeur d'une variable aléatoire Y, x_i est l'observation non aléatoire correspondante et $\theta \in \mathbb{R}^p$ un vecteur de paramètres inconnu.

Dans ce modèle, ϵ_i est une erreur aléatoire non observable, d'espérance 0 et de variance $\sigma^2 < \infty$. On suppose de plus que $\epsilon_i = Y_i - \Psi(x_i, \theta)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ constitue un échantillon de variables aléatoires $i.i.d$ continues de fonction de répartition $F(.)$ ayant pour densité $f(.)$.

Le travail que Templet (1995) a ébauché est celui de tester l'hypothèse H_0 de la normalité des erreurs. Plus précisément, elle a considéré $H_0 : \ F = \Phi$ où Φ est la fonction de répartition de la loi N(0,1).

Considérons les variables aléatoires

$$U_i = 2\Phi\left(\frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{Y_i - \Psi(x_i, \theta)}{\sigma}\right) - 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.9}$$

admettant pour fonction de répartition $G(.)$ et pour densité $g(.)$.
Si H_0 est vraie, ces variables aléatoires constituent un échantillon de variables aléatoires $i.i.d$ de loi uniforme sur [-1,1].

Emboîtons cette densité sous H_0 dans la famille d'emboîtement exponentielle

$$\left\{ g_K(u, \eta) = \frac{1}{2} C_K(\eta) e^{\sum\limits_{k=1}^{K} \eta_k h_k(u)} \mathbb{1}_{[-1,1]}(u); \eta \in \mathbb{R}^K \right\} \tag{2.10}$$

où $h_k(u)$ est le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre normalisé sur [-1,1], $C_K(\eta)$ est une constante telle que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g_K(u, \eta) du = 1$ et K est une constante fixée ($K \in \mathbb{N}^*$). Le test proposé pour H_0 teste la nullité des paramètres η.
Présentons la stratégie pour $K = 1$.

A cet effet, considérons la variable aléatoire

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} h\left(\hat{U}_i\right) \tag{2.11}$$

où

$$h\left(\hat{U}_i\right) = 2\Phi\left(\frac{Y_i - \Psi(x_i, \hat{\theta})}{\hat{\sigma}}\right) - 1 \tag{2.12}$$

et h est le premier polynôme de Legendre normalisé sur [-1,1], $\hat{\theta}$ et $\hat{\sigma}$ étant les estimateurs de θ et σ respectivement, obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance.

En effectuant un développement limité de cette expression autour de $\beta = (\theta, \sigma)'$, on obtient l'expression suivante

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h\left(\hat{U}_i\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h\left(U_i\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}h\left(U_i\right)\right]'\left(\hat{\beta}-\beta\right) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} o\left(\hat{\beta}-\beta\right)}_{o_p(1)} \tag{2.13}$$

En outre, il est possible de montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\beta}h\left(U_i\right) = -J_\beta + o_p(1) \tag{2.14}$$

avec $J_\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} J_{\beta,i}$ où $J_{\beta_i} = Cov\left(\frac{\partial Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y-\Psi(x_i,\theta)}{\sigma}\right)\right)}{\partial\beta}, h(U_i)\right)$ et où $\phi(.)$ désigne la densité de la loi N(0,1).

On obtient donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h(\hat{U}_i) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h(U_i) - J'_\beta\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta) + o_p(1). \tag{2.15}$$

D'autre part, par les propriétés classiques des estimateurs du maximum de vraisemblance (Serfling 1980 p148),

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta) = I_\beta^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y-\Psi(x_i,\theta)}{\sigma}\right)\right)}{\partial\beta} + o_p(1) \tag{2.16}$$

où $I_\beta = Var\left(\frac{\partial Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y-\Psi(x_i,\theta)}{\sigma}\right)\right)}{\partial\beta}\right)$ est la matrice d'information de Fisher de β.

On obtient alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h(\hat{U}_i) = B\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} V_i\right) + o_p(1) \tag{2.17}$$

où l'on a posé

$$V_i = \left(h(U_i), \frac{\partial Log \left(\frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{Y - \Psi(x_i, \theta)}{\sigma} \right) \right)}{\partial \beta} \right)' \tag{2.18}$$

et

$$B = \left(1, -J'_\beta I_\beta^{-1}\right). \tag{2.19}$$

Le théorème limite central permet d'affirmer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} V_i \xrightarrow{L} N \left(0, \begin{pmatrix} 1 & J'_\beta \\ J_\beta & I_\beta \end{pmatrix} \right) \tag{2.20}$$

Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} h(\hat{U}_i) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda)$ où

$$\Lambda = (1, -J'_\beta I_\beta^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & J'_\beta \\ J_\beta & I_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -I_\beta^{-1} J_\beta \end{pmatrix} = 1 - J'_\beta I_\beta^{-1} J_\beta.$$

Ainsi, sous H_0, on a

$$\Psi_{n,1}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} h(\hat{U}_i) \right)' \hat{\Lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} h(\hat{U}_i) \right) \xrightarrow{L} \chi_1^2. \tag{2.21}$$

où $\hat{\Lambda} = 1 - J'_{\hat{\beta}} I_{\hat{\beta}}^{-1} J_{\hat{\beta}}$.

La stratégie de test qui découle de ce comportement asymptotique consiste à rejeter l'hypothèse de normalité des résidus si $\Psi_{n,1}^2 > \chi_{1-\alpha}^2$ où $\chi_{1-\alpha}^2$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du khi-deux à un degré de liberté.

Plus généralement, si la famille d'alternatives comporte K polynômes de Legendre normalisés, la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} h(\hat{U}_i)$ devient un vecteur aléatoire de dimension K noté

$$\underset{\sim}{\hat{h}}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} h_1(\hat{U}_i) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} h_K(\hat{U}_i) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Si on suppose que $J_\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} J_{\beta,i}$ avec $J_{\beta,i} = Cov\left(\frac{\partial Log(\phi(U_i))}{\partial\beta}, \underset{\sim}{h}_K\right)$, le raisonnement précédent se généralise à ce vecteur pour donner finalement

$$\hat{\underset{\sim}{h}}_K \xrightarrow{L} N\left(0, I_K - J'_\beta I_\beta^{-1} J_\beta\right) \tag{2.23}$$

ce qui mène à la statistique de test

$$\Psi^2_{n,K} = \hat{\underset{\sim}{h}}'_K (I_K - J'_{\hat\beta} I_{\hat\beta}^{-1} J_{\hat\beta})^{-1} \hat{\underset{\sim}{h}}_K \xrightarrow{L} \chi^2_K \tag{2.24}$$

sous H_0. On rejette donc H_0 au niveau α si $\Psi_{n,K} > \chi^2_{K,1-\alpha}$.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux rouages du mécanisme de construction d'un test lisse de normalité dans le contexte de régression non-linéaire. Ces rouages correspondent aux équations (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) et (2.20).

Dans le chapitre suivant, nous allons adapter ces rouages au cas d'un test d'adéquation de la normalité des résidus d'un modèle ARMA.

Chapitre 3

La stratégie des tests lisses appliquée au modèle ARMA

Considérerons donc un processus stationnaire $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$, décrit par le modèle ARMA(p,q)

$$Y_t - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

où les φ_i et les θ_i sont des réels et où $(\epsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de variance σ^2. On suppose dans la suite que ce processus est causal et inversible et que l'on dispose des valeurs de l'échantillon $Y_{1-p}, \ldots, Y_T$.

Avec les notations (1.8), (1.9) et (1.10), l'équation (3.1) s'écrit

$$Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} = \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}} + \epsilon_t. \tag{3.2}$$

<u>Posons l'hypothèse supplémentaire que la loi de ϵ_t est indépendante de t.</u>

Dans ce contexte, l'hypothèse que l'on veut tester est

$$\boxed{H_0 :\ \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)\ \forall t = 1, \ldots, T} \tag{3.3}$$

On rappelle que si $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)\ \forall t$, alors les ϵ_t sont $i.i.d$ (car $\gamma(h) = 0$).

Notons par F la fonction de répartition réelle de ϵ_t de densité f et rappelons que Φ est la fonction de répartition de la loi N(0,1) ayant pour densité ϕ.

Posons $U_t = 2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right) - 1$ et notons G la fonction de répartition de U_t de densité g sous H_0.

Par un résultat bien connu[1], $\epsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \Leftrightarrow U_t = 2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) - 1 \sim \mathcal{U}[-1,1]$. Considérons alors la famille d'emboîtement

$$\left\{ g_K(u,\eta) = \frac{1}{2} C_K(\eta) e^{\sum\limits_{k=1}^{K} \eta_k h_k(u)} 1\!\!1_{[-1,1]}(u); \eta \in \mathbb{R}^K \right\} \tag{3.4}$$

où $h_k(u)$ est le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre normalisé sur [-1,1], $C_K(\eta)$ est une constante telle que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g_K(u,\eta)du = 1$ et K est une constante fixée ($K \in \mathbb{N}^*$).

On suppose dans la suite que g, la densité des U_t, appartient à cette famille d'emboîtement (voir Templet 1995 p16), c'est à dire que K est choisie de façon telle que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^K \; g(u) = g_K(u,\eta) = \frac{1}{2} C_K(\eta) e^{\sum\limits_{k=1}^{K} \eta_k h_k(u)} 1\!\!1_{[-1,1]}(u) \tag{3.5}$$

On montre dans l'annexe 5 que $U_t \sim \mathcal{U}[-1,1] \Leftrightarrow g(u) = g_K(u,0) \Leftrightarrow \eta = 0$ et donc le test de H_0 donné en (3.3) se ramène à tester

$$H_0 : \; \eta = 0 \text{ contre } H_1 : \; \eta \neq 0. \tag{3.6}$$

Pour ce problème, on va utiliser la stratégie de test lisse exposée au Chapitre 2. Pour simplifier les choses, nous allons nous limiter d'abord au cas K=1.

Notons

$$U_t = 2\Phi\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\, \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\, \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right) - 1 \tag{3.7}$$

et dénotons

$$\hat{U}_t = 2\Phi\left(\frac{Y_t - \hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)\prime}\, \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)\prime}\, \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}, \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)}\right)}{\hat{\sigma}} \right) - 1 \tag{3.8}$$

où h désigne l'un des polynômes de Legendre normalisé sur [-1,1] et où les $\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}, \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)}\right)$ sont définis à l'annexe 9.

1. Se reporter à l'annexe 4 pour la preuve

On a vu dans le Chapitre 1 p14 que $\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right) = O_p(T^{-\frac{1}{2}})$. Alors, compte tenu du fait que $T^{-\frac{1}{2}} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la proposition 6.1.6 p202 énoncée par Brockwell et Davis (1990) permet d'énoncer l'équation suivante[2]

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h\left(\hat{U}_t\right) = &\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h\left(U_t\right) \\ &+ \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \beta_i}\left[\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h\left(U_t\right)\right]\left(\hat{\beta}_i - \beta_i\right)}_{\frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t)\right]'\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right)} + \underbrace{o_p\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{T}} o_p(1)}. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h(\hat{U}_t) = &\underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h(U_t)}_{①} + \\ &\underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t)\right]'\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right)}_{②} + o_p(1). \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Examinons

$$② = \left[\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right)\right]'\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t)\right]. \qquad (3.11)$$

On montre dans l'annexe 6 que sous l'hypothèse de causalité et d'inversibilité du processus, et si toutes les racines ξ_i du polynôme $\varphi(.)$ de (1.13) vérifient $|\xi_i| < |\alpha_j|\ \forall j$ où $\alpha_j\ j = 1, ..., k$ sont les racines distinctes du polynôme $\theta(.)$ de (1.14), alors on a la convergence en probabilité

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t)\right] \qquad \text{sous } H_0 \qquad (3.12)$$

2. cf. 14.4.1 p475 dans Bishop, Fienberg et Holland (1975)

avec

$$E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t)\right] = \begin{bmatrix} \underset{(p+q)\times 1}{0} \\ -\frac{1}{\sigma} b_k \end{bmatrix} \overset{N}{=} -J \tag{3.13}$$

et où $b_k = E\left[2h'(x)\Big|_{x=2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1} \phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right]$.

On donne à l'annexe 7 une approximation des dix premières valeurs de b_k, obtenue numériquement par le logiciel *Mathematica*.

Ainsi, sous les conditions de régularité évoquées, on a

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t) = -J + o_p(1), \tag{3.14}$$

et on en déduit, puisque $\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(q)} - \underset{\sim}{\beta}^{(q)}\right) = O_p(1)$ et[3] $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h\left(\hat{U}_t\right) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h(U_t) - J'\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right) + o_p(1) \tag{3.15}$$

Or, d'après Gourrieroux et Monfort p325 (1995), on a

$$\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\, \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\, \underset{\sim}{\epsilon}_{t-1}^{(q)}}{\sigma}\right)\right)\right] + o_p(1) \tag{3.16}$$

où $I_{\underset{\sim}{\beta}} \overset{N}{=} Var\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\, \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\, \underset{\sim}{\epsilon}_{t-1}^{(q)}}{\sigma}\right)\right)\right]$ est la matrice d'information de Fisher de $\underset{\sim}{\beta}$.

On en déduit

3. cf. 14.4-6 p484 dans Bishop, Fienberg et Holland (1975)

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h(\hat{U}_t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h(U_t) -$$
$$J' I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \left[Log \left[\frac{1}{\sigma}\phi \left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right) \right] \right] + o_p(1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} \left[h(U_t) - J' I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} Log \left(\frac{1}{\sigma}\phi \left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right) \right) \right] + o_p(1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} BV_t + o_p(1) \quad (3.17)$$

où l'on a posé

$$B = \left(1; \; - J' I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} \right) \tag{3.18}$$

et

$$V_t = \begin{bmatrix} h(U_t) \\ \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \left[Log \left(\frac{1}{\sigma}\phi \left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right) \right) \right] \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

La suite $\{BV_t; t = 1, \ldots, T\}$ étant constituée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de variance finie, le théorème limite central s'applique et on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} BV_t \xrightarrow{L} N\left(E[BV_t], Var[BV_t]\right). \tag{3.20}$$

On montre dans l'annexe 8 que $E[BV_t] = 0$ et $Var[BV_t] = BVar(V_t)B' = 1 - J' I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} J = 1 - \frac{1}{2} b_k^2$. Par conséquent, il en découle que

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} h(\hat{U}_t) \xrightarrow{L} N_1 \left(0 \, , \; 1 - \frac{1}{2} b_k^2 \right) \tag{3.21}$$

Si maintenant l'alternative comporte K polynômes de Legendre normalisés sur [-1,1], la variable aléatoire notée $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h(\hat{U}_t)$ devient le vecteur aléatoire de dimension K noté

$$\underset{\sim}{\hat{h}}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h_1(\hat{U}_t) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h_K(\hat{U}_t) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Une version multidimensionnelle du raisonnement précédent s'applique alors à ce vecteur pour donner

$$\underset{\sim}{\hat{h}}_K \xrightarrow{L} N\left(0, I_K - \frac{1}{2}\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{b}'\right) \tag{3.23}$$

sous H_0 avec $\underset{\sim}{b} = (b_1, \dots, b_K)'$ et donc

$$\underset{\sim}{\hat{h}}'_K (I_K - \frac{1}{2}\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{b}')^{-1} \underset{\sim}{\hat{h}}_K \xrightarrow{L} \chi^2_K. \tag{3.24}$$

On a donc démontré le

Théorème 4. *Soit* $Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underbrace{Y_{t-1}^{(p)}} = \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underbrace{\epsilon_{t-1}^{(q)}} + \epsilon_t \ \forall t \in \mathbb{Z}$, *un processus ARMA(p,q) causal et inversible où les* φ_i *et les* θ_i *sont des réels et où* $(\epsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ *est un bruit blanc de variance* σ^2 *dont la loi est supposée indépendante de* t.

On dispose des observations $Y_{1-p}, \dots, Y_T$ *du processus et on suppose de plus que toute racine* ξ_i *du polynôme* $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p$ *vérifie* $|\xi_i| < |\alpha_j| \ \forall j$ *où les* $\alpha_j \ j = 1, ..., l$ *sont les racines distinctes du polynôme* $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$.

Posons

$$\underset{\sim}{\hat{h}}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h_1(\hat{U}_t) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} h_K(\hat{U}_t) \end{pmatrix}$$

$$avec \qquad \hat{U}_t = 2\Phi\left(\frac{Y_t - \hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)\prime}\, \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)} - \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)\prime}\, \underset{\sim}{\hat{\epsilon}}_{t-1}^{(q)}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}, \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)}\right)}{\hat{\sigma}}\right) - 1,$$

où h_k désigne le $k^{i\grave{e}me}$ polynôme de Legendre normalisé sur $[-1,1]$ et où $\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}$, $\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)}$ et $\hat{\sigma}$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de $\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}$, $\underset{\sim}{\theta}^{(q)}$ et σ respectivement.
Alors sous H_0 de (3.3), on a le résultat suivant

$$\hat{\underset{\sim}{h}}'_K (I_K - \frac{1}{2}\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{b}')^{-1}\hat{\underset{\sim}{h}}_K \xrightarrow{L} \chi^2_K \tag{3.25}$$

où $\underset{\sim}{b} = (b_1, \ldots, b_K)'$ avec $b_k = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} h_k\left(2\Phi(x) - 1\right)(x^2 - 1)\phi(x)dx$.

Notons que l'on peut approcher les b_k numériquement et qu' une liste des dix premières valeurs est fournie à l'annexe 7. Par ailleurs, l'annexe 9 donne la méthode pour calculer $\epsilon_{t-1}^{(q)}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}, \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(q)}\right)$.
Enfin, K est une constante laissée au choix de l'expérimentateur, on la prend souvent égale à 2.
Mentionnons en passant que par chance la statistique du test ne dépend pas de I_β qui est une matrice tres complexe.

Chapitre 4

Simulations informatiques

Les résultats suivants sont les calculs de la puissance du test pour un modèle ARMA(p,q) avec les paramètres $\varphi = (0.1, 0.8)'$ et $\theta = (0.4, 0.5)'$ si $p = 2$ et $q = 2$, $\varphi = 0.8$ si $p = 1$ et $\theta = 0.4$ si $q = 1$. Ces paramètres ont été choisi de façon à satisfaire aux conditions du théorème 4. En effet, dans le cas ARMA(2,2), on trouve que les valeurs absolues des racines réelles du polynôme autorégressif sont 1.05728 et 1.18228 et que le module des racines complexes conjuguées du polynôme moyenne mobile vaut 1.414214. On peut vérifier que les paramètres choisis satisfont aussi aux conditions du théorème 4 pour des ordres inférieurs.
Nous avons choisi de tester des erreurs centrées de lois respectivement N(0,1), Khi-deux(2), Student(5), Skew-Normale(2) (Azzalini, Dalla Valle, 1996), Log-normale(0,1) et Laplace. Notre experience prend en compte quatre tailles d'échantillons différentes $T = 20, 35, 50$
et 100. Pour chaque couple "taille-loi d'erreur" on a généré 1000 fois les T erreurs correspondantes et, à chaque itération on a estimé les paramètres du modèle et calculé les résidus, et testé la normalité au niveau 10%. Ainsi on obtient comme résultat final la puissance empirique du test au seuil 10%, qui correspond au nombre de fois où on a rejeté l'hypothèse nulle de normalité divisé par 1000. Notons en premier lieu que pour la loi normale, la quantité approchée est la proportion de rejet de l'hypothèse nulle lorsque celle-ci est vraie. C'est donc l'approximation de l'erreur de type 1. Elle devra être comparée alors au niveau du test $\alpha = 0.1$. Le premier tableau contient les quantiles de la vraie loi de la statistique sous H_0. Ces quantiles étant assez différents des quantiles théoriques de la loi du χ_2, montrant ainsi une lenteur de la convergence, on les a utilisés pour calculer la puissance du test. Ainsi on rejette l'hypothèse de normalité des résidus si la valeur que prend la statistique du test est, dans un modèle ARMA(p,q) donné, supérieure au quantile correspondant contenu dans le premier tableau. Le deuxième tableau contient la puissance du test pour les différents modèles évoqués et pour toutes les lois mentionnées. Les chiffres encadrés sont les plus grandes puissances.

Loi	n	T	p	q	Quantiles(k=1,...,10)
N(0,1)	1000	20	2	2	1.97 272.2 273.4 1237 1238 3194 3194 6383 6392 10887
N(0,1)	1000	20	2	1	2.66 104.2 107.3 369.9 369.9 723.9 730.3 1269 1269 1893
N(0,1)	1000	20	2	0	1.94 3.99 5.36 6.83 8.20 9.51 10.84 11.96 13.32 14.46
N(0,1)	1000	20	1	2	2.06 183.8 185.6 782.6 786.5 1914 1915 3697 3701 6152
N(0,1)	1000	20	1	1	1.95 9.24 10.62 21.12 21.41 32.75 34.11 59.30 60.33 80.29
N(0,1)	1000	20	1	0	2.02 3.77 5.47 6.64 8.08 9.47 10.76 12.05 13.25 14.44
N(0,1)	1000	20	0	2	2.71 24.81 26.21 75.72 75.78 148.2 148.6 243.8 244.6 368.1
N(0,1)	1000	20	0	1	2.75 5.28 6.87 8.28 9.69 11.65 13.01 15.11 16.12 18.03
N(0,1)	1000	20	0	0	2.79 4.36 5.85 7.36 8.63 9.71 11.10 12.24 13.50 14.53
N(0,1)	1000	35	2	2	1.909 113.9 115.2 437.6 438.3 896.5 899.1 1699 1703 2607
N(0,1)	1000	35	2	1	1.953 5.853 7.734 11.60 14.05 18.13 19.74 25.66 26.98 34.53
N(0,1)	1000	35	2	0	1.839 3.876 5.263 6.500 8.044 9.288 10.85 11.94 13.31 14.69
N(0,1)	1000	35	1	2	2.031 53.20 53.25 157 157.5 351.8 352.7 603.5 604.1 963.1
N(0,1)	1000	35	1	1	2.121 4.949 6.893 10.07 11.50 16.29 17.84 22.74 24.66 31.68
N(0,1)	1000	35	1	0	2.203 3.690 5.363 6.354 7.892 9.156 10.48 11.91 13.35 14.68
N(0,1)	1000	35	0	2	2.676 7.543 9.420 12.60 13.98 18.99 20.45 28.20 28.53 40.85
N(0,1)	1000	35	0	1	2.553 4.920 6.456 8.148 9.380 10.97 12.73 13.83 15.30 16.43
N(0,1)	1000	35	0	0	2.543 4.087 6.050 7.352 8.865 10.14 11.48 12.57 13.77 15.13
N(0,1)	1000	50	2	2	2.042 13.47 15.10 46.50 48.26 109.1 109.2 187.5 190.2 310.8
N(0,1)	1000	50	2	1	1.849 3.945 5.699 7.645 9.088 11.19 12.81 14.62 16.14 17.53
N(0,1)	1000	50	2	0	1.937 3.788 5.634 6.888 8.655 9.879 11.24 12.74 14.07 14.90
N(0,1)	1000	50	1	2	2.288 10.68 11.64 27.34 27.99 53.67 55.09 82.83 84.54 124.8
N(0,1)	1000	50	1	1	2.227 4.696 6.427 8.740 9.950 12.83 14.26 17.09 18.51 22.03
N(0,1)	1000	50	1	0	2.488 3.946 5.581 7.121 8.453 9.878 11.48 12.68 13.39 15.03
N(0,1)	1000	50	0	2	2.549 5.203 6.630 8.690 10.00 12.75 14.25 16.80 17.60 19.53
N(0,1)	1000	50	0	1	2.997 4.802 6.175 7.471 9.081 10.47 11.94 13.24 14.56 15.57
N(0,1)	1000	50	0	0	2.752 4.522 6.190 7.559 9.133 10.28 11.69 13.07 14.26 15.50
N(0,1)	1000	100	2	2	2.166 6.106 7.832 13.47 15.45 23.62 24.72 39.04 40.25 59.52
N(0,1)	1000	100	2	1	1.975 4.087 6.015 7.577 9.116 10.39 11.83 13.22 14.96 16.52
N(0,1)	1000	100	2	0	2.194 4.063 5.920 7.333 8.596 10.04 11.47 12.70 14.40 15.61
N(0,1)	1000	100	1	2	2.399 5.432 6.953 11.23 12.04 17.93 19.23 24.73 26.21 34.00
N(0,1)	1000	100	1	1	2.515 4.399 6.072 7.906 9.325 10.99 12.15 14.38 15.39 17.25
N(0,1)	1000	100	1	0	2.643 4.447 5.943 7.481 9.134 10.26 11.57 12.92 14.05 15.22
N(0,1)	1000	100	0	2	2.686 4.801 6.113 7.499 8.834 10.09 11.65 12.91 13.89 15.41
N(0,1)	1000	100	0	1	2.632 4.431 6.219 7.621 8.872 10.32 11.74 13.15 14.51 15.72
N(0,1)	1000	100	0	0	2.981 4.811 6.382 7.777 9.124 10.37 11.58 12.99 14.67 15.82

TAB. 4.1: *Les quantiles*

Loi	n	T	p	q	Puissance(k=1,...,10)
N(0,1)	1000	20	2	2	9.2 9.6 9.6 9.5 9.5 9.7 9.7 9.2 9.2 9.5
N(0,1)	1000	20	2	1	11.1 12.1 12.2 12.2 12.2 12.3 12.3 12.3 12.4 12.4
N(0,1)	1000	20	2	0	9.9 8.0 8.7 7.7 7.7 8.4 9.1 8.9 8.5 9.2
N(0,1)	1000	20	1	2	8.1 9.1 9.2 9.9 9.9 9.8 9.8 9.9 9.9 9.9
N(0,1)	1000	20	1	1	12.5 11.6 11.8 12.1 12.6 13.4 13.4 12.8 12.8 12.7
N(0,1)	1000	20	1	0	9.8 9.6 9.3 10.1 9.4 9.7 9.2 9.0 8.9 8.5
N(0,1)	1000	20	0	2	8.8 12.2 12.4 12.3 12.4 12.4 12.4 12.3 12.3 12.1
N(0,1)	1000	20	0	1	12.1 10.9 9.1 10.3 11.3 10.0 10.7 10.0 11.0 10.4
N(0,1)	1000	20	0	0	12.7 11.4 10.7 9.6 10.1 10.1 10.0 9.6 10.6 11.0
N(0,1)	1000	35	2	2	11.9 8.2 8.2 7.9 7.9 8.1 8.1 8.1 8.1 8.2
N(0,1)	1000	35	2	1	10.4 9.2 9.7 8.2 7.7 8.5 8.2 8.3 8.4 8.9
N(0,1)	1000	35	2	0	13.1 10.8 11.9 13.7 11.6 12.5 11.0 13.0 12.3 12.0
N(0,1)	1000	35	1	2	11.5 9.2 9.2 9.7 9.7 9.2 9.2 9.4 9.4 8.9
N(0,1)	1000	35	1	1	9.9 10.2 9.8 9.6 9.8 8.2 8.5 9.1 8.9 8.2
N(0,1)	1000	35	1	0	9.9 10.5 9.6 10.8 11.8 10.8 11.3 11.2 11.0 10.4
N(0,1)	1000	35	0	2	10.9 10.7 9.7 10.5 11.3 11.2 11.3 10.6 10.6 10.1
N(0,1)	1000	35	0	1	10.5 8.6 8.4 7.5 8.6 8.4 7.4 8.8 8.1 9.4
N(0,1)	1000	35	0	0	13.7 15.2 12.2 12.6 12.2 11.8 12.1 12.5 13.5 11.9
N(0,1)	1000	50	2	2	8.8 10.7 10.3 9.7 9.7 9.1 9.1 9.6 9.5 9.4
N(0,1)	1000	50	2	1	10.3 12.1 12.2 11.3 12.0 11.4 11.3 10.2 11.3 12.0
N(0,1)	1000	50	2	0	10.9 9.6 9.2 10.2 9.1 9.2 8.7 8.5 8.0 9.3
N(0,1)	1000	50	1	2	8.4 10.8 10.6 9.9 10.2 10.3 10.1 10.5 10.6 10.5
N(0,1)	1000	50	1	1	8.8 8.7 9.5 9.7 10.5 8.3 8.5 9.1 8.9 8.5
N(0,1)	1000	50	1	0	7.6 11.6 11.6 9.8 10.9 9.1 9.4 9.8 11.7 11.2
N(0,1)	1000	50	0	2	12.5 11.7 13.1 12.9 11.8 9.5 10.0 9.6 11.0 10.8
N(0,1)	1000	50	0	1	8.2 8.4 10.6 11.1 9.5 9.7 10.0 10.7 8.9 10.0
N(0,1)	1000	50	0	0	10.7 11.2 9.5 9.6 8.0 9.3 10.6 9.7 10.8 11.2
N(0,1)	1000	100	2	2	9.9 8.9 8.8 9.8 8.2 9.2 9.3 8.3 8.4 8.6
N(0,1)	1000	100	2	1	11.4 9.9 11.1 11.6 10.3 12.0 11.9 11.9 11.1 11.0
N(0,1)	1000	100	2	0	9.0 9.1 9.0 9.2 9.8 9.7 10.4 11.1 9.7 9.7
N(0,1)	1000	100	1	2	9.2 9.3 9.5 8.8 9.8 9.1 9.3 10.1 10.3 10.3
N(0,1)	1000	100	1	1	9.7 10.6 10.5 9.6 9.8 11.1 11.9 11.2 12.2 13.2
N(0,1)	1000	100	1	0	8.1 8.7 10.8 9.1 11.3 11.5 11.6 10.7 11.8 12.3
N(0,1)	1000	100	0	2	9.7 9.8 11.3 11.4 11.5 13.5 11.3 12.5 13.6 13.5
N(0,1)	1000	100	0	1	11.4 10.6 9.8 9.6 11.3 11.1 11.3 11.0 10.8 10.8
N(0,1)	1000	100	0	0	8.0 8.4 9.3 11.4 10.7 12.1 10.8 10.2 9.8 10.7

se poursuit sur la page suivante

suite de la page précédente

Loi	n	T	p	q	Puissance(k=1,...,10)
khi-deux(2)	1000	20	2	2	$\boxed{17.4}$ 4.0 3.8 4.2 4.2 3.6 3.6 3.5 3.5 3.4
khi-deux(2)	1000	20	2	1	$\boxed{15.4}$ 7.2 7.3 7.1 7.1 7.3 7.3 7.1 7.1 7.3
khi-deux(2)	1000	20	2	0	25.9 38.2 $\boxed{67.3}$ 65.5 67.4 65.6 62.9 62.1 60.0 59.3
khi-deux(2)	1000	20	1	2	$\boxed{14.5}$ 4.7 4.9 4.7 4.6 4.5 4.5 4.3 4.3 4.3
khi-deux(2)	1000	20	1	1	20.4 16.9 $\boxed{32.9}$ 17.0 18.2 11.7 11.7 9.1 9.4 8.6
khi-deux(2)	1000	20	1	0	23.3 42.3 73.8 $\boxed{75.1}$ 74.7 72.6 69.8 68.5 68.0 67.8
khi-deux(2)	1000	20	0	2	$\boxed{15.7}$ 11.1 12.5 9.8 10.0 9.8 9.8 9.8 9.8 9.8
khi-deux(2)	1000	20	0	1	17.4 37.8 62.3 63.3 $\boxed{64.5}$ 60.7 57.5 53.6 55.0 52.4
khi-deux(2)	1000	20	0	0	18.1 43.2 79.5 81.0 $\boxed{82.5}$ 82.0 80.1 80.3 80.4 79.9
khi-deux(2)	1000	35	2	2	$\boxed{22.9}$ 7.9 7.9 7.7 7.7 7.6 7.6 7.4 7.4 7.5
khi-deux(2)	1000	35	2	1	29.9 41.9 $\boxed{76.3}$ 70.9 69.1 59.4 58.0 43.9 44.5 33.3
khi-deux(2)	1000	35	2	0	35.7 55.9 91.4 $\boxed{93.2}$ 94.0 92.8 91.5 90.8 89.4 88.4
khi-deux(2)	1000	35	1	2	$\boxed{24.0}$ 6.4 6.7 6.3 6.3 6.1 6.1 6.0 6.1 5.9
khi-deux(2)	1000	35	1	1	28.8 44.0 $\boxed{81.7}$ 79.9 81.3 66.5 65.0 54.0 52.1 40.3
khi-deux(2)	1000	35	1	0	28.6 58.6 92.3 94.0 $\boxed{96.1}$ 95.9 95.3 94.2 92.4 92.2
khi-deux(2)	1000	35	0	2	22.8 31.2 64.4 63.7 $\boxed{66.0}$ 53.3 51.4 36.5 39.3 24.8
khi-deux(2)	1000	35	0	1	25.5 51.2 88.1 91.1 $\boxed{93.9}$ 92.9 90.6 91.2 89.9 89.7
khi-deux(2)	1000	35	0	0	27.1 61.3 94.2 97.0 $\boxed{97.5}$ 96.9 96.3 96.9 96.1 96.2
khi-deux(2)	1000	50	2	2	$\boxed{29.0}$ 19.8 51.8 14.2 13.6 5.6 5.8 4.8 4.8 4.3
khi-deux(2)	1000	50	2	1	37.4 65.2 94.5 94.8 $\boxed{96.1}$ 95.1 94.3 93.4 92.5 92.6
khi-deux(2)	1000	50	2	0	37.9 69.5 96.9 98.1 $\boxed{99.0}$ 98.5 98.5 98.0 97.2 97.6
khi-deux(2)	1000	50	1	2	24.4 30.5 $\boxed{72.5}$ 42.5 44.7 17.1 17.1 11.7 12.1 9.0
khi-deux(2)	1000	50	1	1	29.8 58.9 95.7 95.0 $\boxed{96.7}$ 94.5 93.8 91.3 90.5 85.9
khi-deux(2)	1000	50	1	0	31.5 69.1 98.3 98.4 99.1 $\boxed{99.2}$ 99.1 98.7 98.8 98.4
khi-deux(2)	1000	50	0	2	27.2 57.7 95.3 95.6 $\boxed{97.9}$ 96.4 94.8 93.1 92.8 91.7
khi-deux(2)	1000	50	0	1	23.7 61.0 95.4 97.7 99.0 $\boxed{99.1}$ 98.9 98.8 98.4 98.4
khi-deux(2)	1000	50	0	0	27.6 69.2 97.2 98.6 99.7 $\boxed{99.9}$ 99.7 99.4 99.6 99.3
khi-deux(2)	1000	100	2	2	45.6 70.9 $\boxed{99.9}$ 99.5 99.6 97.2 97.4 85.7 85.3 63.5
khi-deux(2)	1000	100	2	1	46.6 88.5 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 99.9
khi-deux(2)	1000	100	2	0	44.6 88.2 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
khi-deux(2)	1000	100	1	2	39.2 80.0 $\boxed{99.9}$ 99.8 99.9 99.5 99.5 99.1 99.1 97.0
khi-deux(2)	1000	100	1	1	39.8 86.8 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
khi-deux(2)	1000	100	1	0	37.7 86.0 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
khi-deux(2)	1000	100	0	2	35.4 81.3 99.9 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
khi-deux(2)	1000	100	0	1	36.9 86.9 99.9 99.9 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
khi-deux(2)	1000	100	0	0	36.7 86.3 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Student(5)	1000	20	2	2	$\boxed{8.9}$ 6.2 6.1 6.3 6.3 6.4 6.4 6.5 6.3 6.5

se poursuit sur la page suivante

suite de la page précédente

Loi	n	T	p	q	Puissance(k=1,...,10)
Student(5)	1000	20	2	1	9.6 10.0 $\boxed{10.1}$ 9.8 9.8 10.0 10.0 9.8 9.8 9.8
Student(5)	1000	20	2	0	11.1 20.1 20.7 19.5 19.1 19.8 20.9 21.3 $\boxed{21.6}$ 21.4
Student(5)	1000	20	1	2	$\boxed{9.4}$ 9.1 9.2 8.9 8.9 9.1 9.1 8.9 8.9 8.7
Student(5)	1000	20	1	1	8.7 $\boxed{12.2}$ 12.0 10.1 10.7 10.1 10.0 9.2 9.4 9.7
Student(5)	1000	20	1	0	8.2 $\boxed{20.4}$ 18.4 19.6 19.1 19.2 19.6 19.3 19.9 20.1
Student(5)	1000	20	0	2	8.1 $\boxed{9.4}$ 9.3 8.7 8.8 9.2 9.3 9.0 9.0 9.1
Student(5)	1000	20	0	1	8.6 20.5 19.3 $\boxed{20.6}$ 20.5 20.2 20.0 18.6 19.2 19.3
Student(5)	1000	20	0	0	9.0 23.2 22.6 21.9 23.6 24.9 24.7 24.8 25.3 $\boxed{25.8}$
Student(5)	1000	35	2	2	$\boxed{9.5}$ 7.4 7.4 7.2 7.1 7.6 7.6 7.5 7.4 7.6
Student(5)	1000	35	2	1	9.3 $\boxed{24.0}$ 22.7 20.7 18.6 18.2 17.3 16.7 16.6 14.8
Student(5)	1000	35	2	0	9.5 33.9 33.2 $\boxed{36.6}$ 35.5 35.8 33.2 34.8 33.5 32.2
Student(5)	1000	35	1	2	7.5 7.9 $\boxed{8.1}$ 8.0 8.0 8.0 8.0 8.0 8.0 8.0
Student(5)	1000	35	1	1	7.2 $\boxed{24.9}$ 23.4 21.4 21.7 17.9 17.6 16.3 16.1 15.3
Student(5)	1000	35	1	0	8.1 $\boxed{35.4}$ 31.2 34.8 33.7 33.9 33.8 33.6 32.3 30.9
Student(5)	1000	35	0	2	8.6 21.4 19.7 21.2 $\boxed{21.6}$ 20.2 20.1 18.1 18.6 16.3
Student(5)	1000	35	0	1	9.5 28.0 $\boxed{30.1}$ 28.6 28.6 28.9 27.1 28.7 27.0 28.3
Student(5)	1000	35	0	0	10.3 $\boxed{36.6}$ 31.7 33.8 33.3 32.4 32.3 34.6 34.8 33.3
Student(5)	1000	50	2	2	9.1 11.1 $\boxed{11.2}$ 6.9 6.9 6.2 6.2 5.8 5.8 5.6
Student(5)	1000	50	2	1	8.8 $\boxed{39.5}$ 35.2 34.9 35.4 32.8 32.3 32.7 31.8 32.7
Student(5)	1000	50	2	0	8.9 $\boxed{45.7}$ 39.2 40.3 39.8 40.6 40.9 39.9 40.4 42.7
Student(5)	1000	50	1	2	6.6 17.1 $\boxed{18.0}$ 11.2 11.3 10.2 10.1 9.4 9.4 8.4
Student(5)	1000	50	1	1	7.9 $\boxed{32.1}$ 31.2 31.2 31.5 29.2 29.9 29.4 27.9 26.5
Student(5)	1000	50	1	0	6.1 $\boxed{44.0}$ 43.1 43.6 42.2 42.0 39.5 41.3 43.1 41.8
Student(5)	1000	50	0	2	9.9 31.2 29.6 31.1 $\boxed{31.6}$ 29.1 28.3 27.9 29.4 30.2
Student(5)	1000	50	0	1	7.1 35.3 33.5 $\boxed{37.5}$ 34.7 36.2 35.4 35.3 35.7 36.5
Student(5)	1000	50	0	0	7.8 $\boxed{40.3}$ 38.1 39.0 37.9 39.1 38.6 39.5 39.9 39.0
Student(5)	1000	100	2	2	6.9 $\boxed{41.3}$ 39.9 29.3 28.0 22.1 22.5 17.0 16.9 14.0
Student(5)	1000	100	2	1	9.5 $\boxed{58.5}$ 53.6 56.3 53.6 55.5 54.3 55.4 53.3 53.5
Student(5)	1000	100	2	0	7.5 $\boxed{61.7}$ 57.2 59.1 58.2 59.1 58.1 58.2 55.9 56.5
Student(5)	1000	100	1	2	7.4 $\boxed{45.0}$ 43.3 37.1 37.6 30.5 30.4 27.4 27.5 23.3
Student(5)	1000	100	1	1	8.6 $\boxed{62.5}$ 58.9 59.6 57.7 58.9 59.1 56.2 56.6 55.5
Student(5)	1000	100	1	0	6.4 $\boxed{62.4}$ 60.4 60.3 56.8 59.5 59.5 60.5 60.6 60.9
Student(5)	1000	100	0	2	8.8 58.8 57.7 $\boxed{60.4}$ 60.2 60.9 58.5 59.6 60.4 59.8
Student(5)	1000	100	0	1	8.2 $\boxed{61.8}$ 57.9 59.3 60.5 60.4 60.3 59.6 59.0 59.6
Student(5)	1000	100	0	0	6.5 58.8 57.1 59.0 59.0 59.5 $\boxed{59.7}$ 58.7 57.2 57.9
Skew-N(2)	1000	20	2	2	11.9 14.9 14.9 15.4 15.4 15.9 15.9 16.0 16.1 $\boxed{16.5}$
Skew-N(2)	1000	20	2	1	10.8 11.6 11.6 11.5 11.6 $\boxed{11.9}$ 11.9 11.6 11.9 11.9

se poursuit sur la page suivante

suite de la page précédente

Loi	n	T	p	q	Puissance(k=1,...,10)
Skew-N(2)	1000	20	2	0	9.9 11.4 $\boxed{14.6}$ 12.6 13.8 13.3 12.5 13.5 12.6 13.4
Skew-N(2)	1000	20	1	2	11.7 14.5 14.5 14.6 14.6 $\boxed{14.7}$ 14.7 14.6 14.6 14.7
Skew-N(2)	1000	20	1	1	11.3 14.7 15.6 15.9 16.3 17.6 17.6 16.6 16.7 $\boxed{17.9}$
Skew-N(2)	1000	20	1	0	12.9 14.7 16.0 $\boxed{16.5}$ 15.5 15.0 15.7 13.8 14.1 12.3
Skew-N(2)	1000	20	0	2	9.1 13.2 13.1 13.0 13.0 13.2 13.3 $\boxed{13.7}$ 13.7 13.4
Skew-N(2)	1000	20	0	1	10.2 13.7 15.7 $\boxed{17.0}$ 16.9 16.0 15.9 15.1 16.3 15.1
Skew-N(2)	1000	20	0	0	11.3 13.1 17.3 15.2 16.1 $\boxed{17.6}$ 15.5 15.0 15.3 15.7
Skew-N(2)	1000	35	2	2	11.3 12.2 12.2 12.2 12.2 $\boxed{12.7}$ 12.7 12.4 12.4 12.5
Skew-N(2)	1000	35	2	1	11.7 13.0 $\boxed{15.7}$ 13.6 12.4 12.2 12.4 12.0 12.1 11.4
Skew-N(2)	1000	35	2	0	14.5 13.3 19.8 20.7 19.8 $\boxed{20.8}$ 18.7 18.8 17.8 18.2
Skew-N(2)	1000	35	1	2	9.6 11.4 11.5 12.3 12.3 12.3 12.3 12.6 12.6 $\boxed{12.8}$
Skew-N(2)	1000	35	1	1	12.4 15.8 $\boxed{17.6}$ 16.8 17.1 15.5 15.6 16.8 16.1 16.6
Skew-N(2)	1000	35	1	0	10.6 14.0 19.8 20.8 $\boxed{21.2}$ 20.0 19.1 19.5 17.8 17.5
Skew-N(2)	1000	35	0	2	9.9 11.4 12.1 $\boxed{12.2}$ 11.9 12.0 12.1 11.5 11.8 11.6
Skew-N(2)	1000	35	0	1	14.3 10.9 $\boxed{16.4}$ 15.0 15.2 14.5 12.6 12.8 11.9 13.6
Skew-N(2)	1000	35	0	0	13.2 16.3 $\boxed{18.6}$ 20.1 19.1 18.0 17.0 16.5 16.8 17.5
Skew-N(2)	1000	50	2	2	$\boxed{15.4}$ 15.0 15.1 13.7 13.7 13.5 13.6 14.1 14.0 13.7
Skew-N(2)	1000	50	2	1	13.4 16.6 $\boxed{24.2}$ 23.9 23.9 21.4 20.2 20.1 19.4 20.8
Skew-N(2)	1000	50	2	0	12.7 15.7 18.6 $\boxed{21.0}$ 18.7 19.9 19.9 19.5 19.3 20.9
Skew-N(2)	1000	50	1	2	10.4 10.8 13.2 13.7 13.8 14.8 14.8 16.2 15.8 $\boxed{17.1}$
Skew-N(2)	1000	50	1	1	11.0 13.0 19.7 22.4 $\boxed{23.9}$ 23.0 21.5 21.9 21.3 20.5
Skew-N(2)	1000	50	1	0	9.7 15.6 $\boxed{24.3}$ 23.7 23.1 21.7 20.2 20.6 22.5 19.8
Skew-N(2)	1000	50	0	2	12.9 14.1 18.7 $\boxed{19.1}$ 17.3 15.9 16.6 14.8 15.7 16.2
Skew-N(2)	1000	50	0	1	10.1 11.8 $\boxed{19.7}$ 19.7 18.0 17.0 17.4 17.4 17.3 16.7
Skew-N(2)	1000	50	0	0	10.1 11.8 17.8 17.2 18.2 $\boxed{19.8}$ 19.2 18.0 17.8 17.4
Skew-N(2)	1000	100	2	2	14.9 15.5 $\boxed{27.0}$ 21.4 21.0 20.8 21.6 19.8 19.5 19.0
Skew-N(2)	1000	100	2	1	18.0 15.2 30.9 29.7 30.1 $\boxed{31.3}$ 29.5 29.9 28.7 26.9
Skew-N(2)	1000	100	2	0	14.6 13.6 31.2 30.9 $\boxed{34.0}$ 33.2 32.6 33.5 30.8 29.4
Skew-N(2)	1000	100	1	2	13.9 14.3 $\boxed{29.8}$ 24.2 27.5 21.3 20.9 20.7 21.3 21.3
Skew-N(2)	1000	100	1	1	11.6 14.8 31.7 30.4 $\boxed{33.0}$ 32.9 32.3 30.6 32.2 31.8
Skew-N(2)	1000	100	1	0	11.7 15.4 32.1 32.2 32.6 $\boxed{32.9}$ 32.8 32.0 31.9 32.3
Skew-N(2)	1000	100	0	2	12.9 14.5 30.8 31.0 35.1 $\boxed{35.9}$ 33.8 35.2 35.4 34.4
Skew-N(2)	1000	100	0	1	14.9 15.4 32.7 33.0 $\boxed{36.6}$ 35.2 34.0 32.6 30.5 30.1
Skew-N(2)	1000	100	0	0	12.8 16.5 30.4 30.7 33.5 32.9 $\boxed{34.0}$ 32.9 29.1 30.6
Log-Normale	1000	20	2	2	$\boxed{17.7}$ 4.7 4.6 4.8 4.8 4.5 4.5 4.4 4.4 4.4
Log-Normale	1000	20	2	1	$\boxed{23.3}$ 8.8 8.9 8.6 8.8 8.7 8.7 8.6 8.6 8.6
Log-Normale	1000	20	2	0	32.6 62.2 84.8 $\boxed{85.8}$ 83.8 83.2 80.7 80.6 78.8 78.8

se poursuit sur la page suivante

suite de la page précédente					
Loi	n	T	p	q	Puissance(k=1,...,10)
Log-Normale	1000	20	1	2	$\boxed{17.6}$ 5.3 5.3 5.0 5.0 5.0 5.0 4.7 4.7 4.7
Log-Normale	1000	20	1	1	25.4 35.8 $\boxed{56.5}$ 36.8 37.5 28.3 28.6 19.3 20.0 17.4
Log-Normale	1000	20	1	0	29.0 67.9 89.0 89.1 $\boxed{90.7}$ 89.9 88.6 87.7 86.3 85.7
Log-Normale	1000	20	0	2	$\boxed{25.5}$ 19.2 21.7 9.3 9.7 9.6 9.6 9.4 9.4 8.9
Log-Normale	1000	20	0	1	27.2 61.0 $\boxed{86.0}$ 85.8 85.7 83.2 82.6 81.0 79.4 76.8
Log-Normale	1000	20	0	0	31.1 70.0 92.7 94.1 $\boxed{95.5}$ 95.2 94.2 94.5 94.0 94.1
Log-Normale	1000	35	2	2	$\boxed{31.1}$ 6.7 6.7 6.0 6.0 6.3 6.3 5.8 5.8 5.9
Log-Normale	1000	35	2	1	37.9 71.0 $\boxed{92.5}$ 89.8 89.1 85.8 84.5 76.2 75.4 68.5
Log-Normale	1000	35	2	0	41.2 81.0 97.3 97.7 $\boxed{98.0}$ 97.6 97.5 97.3 96.8 96.6
Log-Normale	1000	35	1	2	$\boxed{29.9}$ 14.7 17.2 6.1 6.1 5.9 5.9 5.9 5.9 5.9
Log-Normale	1000	35	1	1	34.8 74.2 $\boxed{95.1}$ 93.2 94.1 89.1 87.3 82.0 80.8 71.9
Log-Normale	1000	35	1	0	36.4 84.8 98.5 99.1 $\boxed{99.2}$ 98.9 98.7 98.7 98.4 97.9
Log-Normale	1000	35	0	2	28.4 69.5 $\boxed{89.2}$ 87.9 88.6 82.1 81.8 70.9 73.6 60.8
Log-Normale	1000	35	0	1	35.2 81.9 96.9 97.7 $\boxed{98.4}$ 98.1 97.9 98.3 97.6 97.5
Log-Normale	1000	35	0	0	35.6 86.3 99.5 99.7 $\boxed{99.8}$ 99.8 99.8 99.7 99.6 99.6
Log-Normale	1000	50	2	2	37.0 52.2 $\boxed{82.6}$ 46.1 44.9 21.2 22.0 16.9 16.9 11.9
Log-Normale	1000	50	2	1	45.5 90.0 99.0 99.2 $\boxed{99.5}$ 99.3 99.2 99.1 98.6 99.0
Log-Normale	1000	50	2	0	50.2 92.2 99.8 $\boxed{100.0}$ 99.9 99.9 99.9 99.7 99.7 99.7
Log-Normale	1000	50	1	2	38.5 62.1 $\boxed{89.6}$ 75.3 76.6 50.4 50.9 41.3 42.7 34.6
Log-Normale	1000	50	1	1	42.4 88.6 98.8 98.9 $\boxed{99.3}$ 99.0 99.1 98.8 98.7 97.6
Log-Normale	1000	50	1	0	36.5 93.2 99.8 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 99.8
Log-Normale	1000	50	0	2	37.2 89.1 98.3 98.7 $\boxed{99.2}$ 98.9 98.7 98.1 98.2 97.9
Log-Normale	1000	50	0	1	36.6 90.6 99.3 $\boxed{99.7}$ 99.6 99.6 99.6 99.4 99.2 99.3
Log-Normale	1000	50	0	0	37.0 94.4 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	2	2	52.0 98.3 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 99.1 99.0 95.3
Log-Normale	1000	100	2	1	53.0 99.9 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	2	0	52.4 99.7 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	1	2	52.8 98.5 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 99.9 99.9 99.8
Log-Normale	1000	100	1	1	50.3 99.8 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	1	0	50.4 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	0	2	48.4 99.3 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	0	1	51.8 99.6 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Log-Normale	1000	100	0	0	48.1 99.8 $\boxed{100.0}$ 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0 100.0
Laplace	1000	20	2	2	$\boxed{8.9}$ 6.6 6.6 6.5 6.6 6.5 6.5 6.1 6.1 6.0
Laplace	1000	20	2	1	8.8 $\boxed{9.6}$ 9.6 9.3 9.3 9.1 9.1 9.0 9.1 9.2
Laplace	1000	20	2	0	10.0 27.7 30.2 $\boxed{31.6}$ 31.1 30.5 29.3 29.3 30.1 30.0
Laplace	1000	20	1	2	$\boxed{7.3}$ 5.0 5.0 5.3 5.2 5.0 5.1 4.8 4.8 4.9
se poursuit sur la page suivante					

suite de la page précédente					
Loi	n	T	p	q	Puissance(k=1,...,10)
Laplace	1000	20	1	1	7.3 $\boxed{16.1}$ 15.9 11.4 11.8 11.4 11.6 10.7 10.7 10.3
Laplace	1000	20	1	0	7.5 $\boxed{31.7}$ 29.4 31.5 30.7 28.6 29.4 28.5 29.4 29.5
Laplace	1000	20	0	2	8.5 9.4 $\boxed{9.6}$ 9.1 9.3 9.3 9.4 9.1 9.1 8.8
Laplace	1000	20	0	1	7.8 26.7 25.5 $\boxed{28.4}$ 28.0 27.1 26.8 25.6 26.7 25.6
Laplace	1000	20	0	0	8.2 30.5 29.8 30.7 30.5 $\boxed{31.8}$ 31.4 31.1 30.1 30.1
Laplace	1000	35	2	2	$\boxed{10.1}$ 7.8 7.8 7.3 7.4 7.7 7.7 7.3 7.3 7.4
Laplace	1000	35	2	1	8.3 $\boxed{33.7}$ 30.5 25.5 21.6 18.9 18.4 14.8 15.2 12.5
Laplace	1000	35	2	0	9.5 46.2 46.8 $\boxed{48.2}$ 45.8 47.7 44.9 44.1 43.3 43.1
Laplace	1000	35	1	2	$\boxed{8.3}$ 7.0 7.0 7.3 7.3 7.1 7.1 7.0 7.0 6.8
Laplace	1000	35	1	1	7.2 $\boxed{40.5}$ 37.2 31.7 30.5 25.1 24.1 20.0 20.1 16.9
Laplace	1000	35	1	0	5.5 52.5 49.0 $\boxed{53.2}$ 51.0 50.9 49.5 48.0 47.5 47.3
Laplace	1000	35	0	2	8.4 $\boxed{27.9}$ 26.0 23.0 23.8 20.7 21.4 16.7 17.8 14.8
Laplace	1000	35	0	1	9.5 $\boxed{44.0}$ 43.3 42.6 42.3 40.6 38.8 40.4 38.7 39.1
Laplace	1000	35	0	0	7.7 $\boxed{51.9}$ 44.2 47.2 44.8 45.8 44.8 45.3 44.7 44.6
Laplace	1000	50	2	2	8.5 $\boxed{14.9}$ 13.9 5.9 5.8 5.0 5.1 5.2 5.2 5.0
Laplace	1000	50	2	1	9.8 $\boxed{57.2}$ 53.0 51.5 49.0 46.2 44.0 43.3 43.3 43.1
Laplace	1000	50	2	0	6.8 $\boxed{65.0}$ 59.7 61.7 58.6 57.2 55.6 53.8 54.7 56.7
Laplace	1000	50	1	2	6.4 25.0 $\boxed{25.2}$ 11.6 12.0 9.6 9.7 9.8 9.8 9.2
Laplace	1000	50	1	1	8.1 $\boxed{53.5}$ 49.6 47.0 46.8 41.1 40.8 36.2 36.3 32.1
Laplace	1000	50	1	0	6.3 $\boxed{63.0}$ 59.0 56.4 56.5 56.9 54.2 53.2 54.9 53.0
Laplace	1000	50	0	2	7.7 $\boxed{48.5}$ 46.7 44.4 43.0 38.9 36.7 34.8 36.2 36.1
Laplace	1000	50	0	1	6.4 $\boxed{57.0}$ 56.1 55.4 52.7 52.7 50.9 50.3 51.2 52.3
Laplace	1000	50	0	0	7.5 $\boxed{68.7}$ 64.0 63.5 61.0 64.6 62.4 61.0 61.1 61.7
Laplace	1000	100	2	2	6.5 $\boxed{67.5}$ 64.6 48.8 46.3 32.2 33.3 18.3 18.2 11.9
Laplace	1000	100	2	1	8.4 $\boxed{87.0}$ 83.9 82.3 80.7 82.2 80.5 79.9 77.7 75.7
Laplace	1000	100	2	0	6.5 $\boxed{88.0}$ 84.3 84.8 84.0 82.8 81.5 81.0 79.9 79.5
Laplace	1000	100	1	2	5.9 $\boxed{76.2}$ 74.3 61.6 62.5 47.5 47.5 40.3 39.7 31.1
Laplace	1000	100	1	1	6.2 $\boxed{84.9}$ 83.0 81.0 78.8 77.8 77.8 74.8 75.5 73.6
Laplace	1000	100	1	0	4.9 $\boxed{89.2}$ 86.9 86.3 84.9 86.0 85.1 84.6 83.9 82.9
Laplace	1000	100	0	2	7.4 $\boxed{85.0}$ 83.6 82.3 82.5 82.8 80.5 81.4 80.5 79.9
Laplace	1000	100	0	1	7.7 $\boxed{88.8}$ 85.6 85.3 84.9 84.5 83.3 81.6 80.3 79.9
Laplace	1000	100	0	0	6.5 $\boxed{89.3}$ 86.9 86.5 85.6 85.1 85.2 85.9 83.8 83.4

TAB. 4.2: *La puissance du test*

Ces résultats sont assez satisfaisants. Les puissances obtenues laissent penser que ce test est utilisable dans la pratique avec une trentaine d'observations et que $K=2$ est un bon choix pour l'ordre de la famille d'emboîtement, sauf pour les modèles ARMA(2,2) et ARMA(2,1) pour lesquels il vaut mieux prendre $K=1$. Ce test détecte très bien les lois asymétriques. On remarque que dès que $q=2$ la puissance n'est pas très bonne.

Conclusion

Le test de normalité des résidus d'un modèle ARMA qui a été construit au cours de ce travail apporte une nouvelle pierre à la chapelle des méthodes dites de validation qui consistent à confirmer le bon ajustement d'un modèle à un jeu de données. La construction de ce test est basée sur la stratégie utilisée par Templet (1995), qui a été inspirée par une certaine approche des tests lisses de Neyman (1937). Ce test possède le double avantage de faire partie des rares tests de normalité existant dans le cadre des modèles ARMA et d'avoir une puissance acceptable pour les différentes lois testées.

Notons que la stratégie utilisée semble applicable à des modèles plus généraux tels les modèles ARIMA, SARIMA, ARCH et autres, cependant les développements théoriques nécessaires sont alors beaucoup plus pesants.

Ce travail théorique devrait tout de même être effectué compte tenu du fait que de tels tests sont quasi inexistants et que ces modèles sont utilisés dans de nombreux domaines touchant aux séries chronologiques.

Annexe 1

Test du portmanteau

Ce test, utilisé pour valider l'hypothèse d'indépendance du processus $\{\epsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$, a été proposé par Box-Pierce(1970).

Il est fondé sur la statistique

$$Q = T \sum_{h=1}^{K} \hat{\rho}_h^2[\tilde{\epsilon}]$$

$\hat{\rho}_h^2[\tilde{\epsilon}]$ étant la corrélation empirique entre les résidus distants de h.

On peut montrer que, sous l'hypothèse d'indépendance des erreurs ϵ_t, Q suit asymptotiquement une loi du χ^2 à K-p-q degrés de liberté; on refuse donc l'hypothèse d'indépendance, au niveau α, si $Q > \chi^2_{K-p-q,1-\alpha}$.

Les propriétés à distance finie de Q restant, même pour T relativement grand, assez différentes des propriétés asymptotiques, on a proposé une statistique modifiée dont le comportement stochastique serait plus proche de la loi χ^2 asymptotique. Cette statistique est donnée par

$$Q' = T(T+2) \sum_{h=1}^{K} (T-h)^{-1} \hat{\rho}_h^2[\tilde{\epsilon}],$$

et s'utilise de la même façon que Q.

Pour appliquer ce test en pratique, il faut choisir K. Celui-ci doit être choisi relativement élevé et on le prend habituellement dans la zone 15-30 (voir Davies-Triggs-Newbold (1977) et Prothero-Wallis (1976) pour une discussion).

Annexe 2

Estimation des paramètres d'un modèle AR(p)

On rappelle[1] que le modèle AR(p) est défini par l'équation

$$Y_t = \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)} + \epsilon_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Posons $\underset{\sim}{\beta}^{(p)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varphi}^{(p)} \\ \sigma \end{bmatrix}$ et estimons $\underset{\sim}{\beta}^{(p)}$ par la méthode du maximum de vraisemblance. La densité de probabilité conjointe des $Y_1, \ldots, Y_T$ sous H_0, ($Y_{-p+1}, \ldots, Y_0$ étant connus) est (Anderson 1971, p184)

$$L_0(\underset{\sim}{\beta}^{(p)}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}T}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)^2\right],$$

d'où

$$LogL_0(\underset{\sim}{\beta}^{(p)}) = -\frac{1}{2}T\,Log(2\pi) - T\,Log(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)^2.$$

En dérivant par rapport à σ l'expression précédente, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}LogL_0(\underset{\sim}{\beta}^{(p)}) = -\frac{T}{\sigma} + \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)^2}{\sigma^3},$$

soit

$$-\frac{T}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3}Z'\left(\underset{\sim}{\hat{\varphi}}^{(p)}\right)Z\left(\underset{\sim}{\hat{\varphi}}^{(p)}\right) = 0,$$

1. cf. Chapitre 1

avec

$$Z\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)=\begin{bmatrix} Y_1-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{1-1}^{(p)} \\ \vdots \\ Y_T-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{T-1}^{(p)} \end{bmatrix}.$$

De ceci on tire

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}Z'\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}\right)Z\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}\right).$$

De même, en dérivant par rapport à $\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}LogL_0\left(\underset{\sim}{\beta}^{(p)}\right)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)^2,$$

soit

$$\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)\underbrace{\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)\Bigg|_{\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}=\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}}}_{-\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)}\right)\Big|_{\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}=\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}}}=0,$$

soit encore

$$\left[\dot{\Psi}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}\right)\right]'Z\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}\right)=0,$$

avec

$$\underset{T\times p}{\dot{\Psi}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{1-1}^{(p)}\right) & \ldots & \frac{\partial}{\partial\varphi_p}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{1-1}^{(p)}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{T-1}^{(p)}\right) & \ldots & \frac{\partial}{\partial\varphi_p}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}_{T-1}^{(p)}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} Y_0 & Y_{-1} & \ldots & Y_{1-p} \\ Y_1 & Y_0 & \ldots & Y_{2-p} \\ \vdots & & & \vdots \\ Y_{T-1} & \ldots & \ldots & Y_{T-p} \end{bmatrix}.$$

En effet

$$\left[\dot{\Psi}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right]' Z\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{1-1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{T-1}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\varphi_p}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{1-1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\varphi_p}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{T-1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{1-1} \\ \vdots \\ Y_T - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{T-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right)\right]\left(Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_p}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right)\right]\left(Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right)\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right).$$

On doit avoir

$$\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right)\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right)\Bigg|_{\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}=\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)}} = 0,$$

soit

$$\sum_{t=1}^{T}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\left(Y_t - \underbrace{\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}}_{1\times 1}\right) = 0,$$

soit

$$\left(\sum_{t=1}^{T}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\underset{\sim}{Y}^{(p)\prime}_{t-1}\right)\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)} = \sum_{t=1}^{T}Y_t\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}.$$

On obtient finalement que

$$\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)} = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\underset{\sim}{Y}^{(p)\prime}_{t-1}\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_t\underset{\sim}{Y}^{(p)}_{t-1}\right).$$

D'après Anderson (1971) 5.5.7 p200, on peut écrire

$$\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)} - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right) \xrightarrow{L} N_p(0, \sigma^2 F^{-1})$$

où F peut être calculée par deux méthodes détaillées dans le même ouvrage. ce qui signifie, en utilisant le théorème 14.4-2 p477 de Bishop, Fienberg et Holland (1975)

$$\sqrt{T}\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)} - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right) = O_p(1).$$

et donc que

$$\left(\hat{\underset{\sim}{\varphi}}^{(p)} - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right) = O_p(T^{-\frac{1}{2}}).$$

En fait, on a aussi, de part des propriétés classiques des estimateurs du maximum de vraisemblance (Serfling 1980 p145), que $\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(p)} - \underset{\sim}{\beta}^{(p)}\right) = O_p(T^{-\frac{1}{2}})$.

Annexe 3

Les polynômes de Legendre

Nous allons rappeler quelques propriétés sur les polynômes de Legendre puis nous donnerons la liste de ces dix premiers polynômes.

On définit la suite (P_n) des polynômes de Legendre normalisés sur [-1,1] par la formule

$$P_n(x) = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Ces polynômes vérifient

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \delta_{mn}.$$

Pour déterminer l'expression des polynômes de Legendre, on peut utiliser la formule

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r(2n-2r)!(2n+1)}{2^{n+1}r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$$

où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$, c'est-à-dire l'entier qui est égal à $n/2$ si n est pair et à $(n-1)/2$ si n est impair.

Les dix premiers polynômes de Legendre normalisés sur [-1,1] s'écrivent

$$h_1(x) = \sqrt{3}x$$

$$h_2(x) = \sqrt{5}\frac{(3x^2 - 1)}{2}$$

$$h_3(x) = \sqrt{7}\frac{(5x^3 - 3x)}{2}$$

$$h_4(x) = \sqrt{9}\frac{(35x^4 - 30x^2 + 3)}{8}$$

$$h_5(x) = \sqrt{11}\frac{(63x^5 - 70x^3 + 15x)}{8}$$

$$h_6(x) = \sqrt{13}\frac{(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)}{16}$$

$$h_7(x) = \sqrt{15}\frac{(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)}{16}$$

$$h_8(x) = \sqrt{17}\frac{(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)}{128}$$

$$h_9(x) = \sqrt{19}\frac{(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)}{128}$$

$$h_{10}(x) = \sqrt{21}\frac{(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)}{256}$$

Annexe 4

Montrons la propriété suivante

$$\epsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \;\Leftrightarrow\; U_t = 2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) - 1 \sim \mathcal{U}[-1,1]$$

où Φ est la fonction de répartition d'une N(0,1).

($\Rightarrow$) Supposons que $\epsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$

$$U_t = 2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) - 1$$

$$F_{U_t}(x) \overset{déf}{=} P[U_t \leq x] =$$
$$P[2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) - 1 \leq x] = P[\Phi(\frac{\epsilon_t}{\sigma}) \leq \frac{x+1}{2}]$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ si } \frac{x+1}{2} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } \frac{x+1}{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1 \\ P[\frac{\epsilon_t}{\sigma} \leqslant \Phi^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)] = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \frac{x+1}{2} \text{ si } x \in [-1,1] \end{cases}$$

qui est la fonction de répartition d'une $\mathcal{U}[-1,1]$.

($\Leftarrow$) Supposons que $U_t \sim \mathcal{U}[-1,1]$

$$U_t = 2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) - 1$$

donc

$$\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) = \frac{U_t + 1}{2}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{\frac{\epsilon_t}{\sigma}}(x) &\overset{déf}{=} P[\frac{\epsilon_t}{\sigma} \leqslant x] = P[\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) \leqslant \Phi(x)] \\ &= P[\frac{U_t+1}{2} \leqslant \Phi(x)] = P[U_t \leqslant 2\Phi(x)-1] \\ &\overset{déf}{=} F_{U_t}(2\Phi(x)-1) = \Phi(x) \qquad (-1 \leqslant 2\Phi(x)-1 \leqslant 1 \text{ car } \Phi(x) \in [0,1]) \end{aligned}$$

et donc $\frac{\epsilon_t}{\sigma} \sim N(0,1)$ et $\epsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$.

Annexe 5

Montrons la propriété de la remarque 2 du chapitre 3

$$U_t \sim \mathcal{U}[-1,1] \Leftrightarrow g(u) = g_K(u,0) \Leftrightarrow \eta = 0.$$

($\Leftarrow$) Supposons que $\eta = 0$

Alors $g_K(u,0) = \frac{1}{2} C_K(0) 1\!\!1_{[-1,1]}(u)$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} C_K(0)du = 1$$

$$\Rightarrow C_K(0) = 1$$

$$\Rightarrow \; g_K(u,0) = g(u) = \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}(u)$$

$$\Rightarrow \; U_t \sim \mathcal{U}[-1,1]$$

($\Rightarrow$) Supposons que $U_t \sim \mathcal{U}[-1,1]$

Alors $g(u) = \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}(u) = g_K(u,0)$

Annexe 6

Preuve de la convergence en probabilité

1 Expression des coefficients

Dans cette section, nous allons obtenir l'expression sous forme de sommations de certains coefficients utiles par la suite. En se reportant à l'annexe 9, on peut écrire

$$\delta_r = \gamma_{r-p}\varphi_p + \gamma_{r-p+1}\varphi_{p-1} + \ldots + \gamma_r\varphi_0 \qquad \forall r \geqslant p, \tag{1.1}$$

$$\gamma_r = -(\theta_1\gamma_{r-1} + \ldots + \theta_q\gamma_{r-q}) \qquad \forall r \geqslant q, \tag{1.2}$$

$$\delta_r = \delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right), \tag{1.3}$$

$$\gamma_r = \gamma_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}\right). \tag{1.4}$$

Posons $a_r = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right]$ et $b_{r-1} = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left[\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right]$.
Nous allons chercher à exprimer plus précisément ces coefficients a_r et b_r.
De (1.1)

$$b_{r-1} = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\delta_r) = \gamma_{r-1}. \tag{1.5}$$

Or de (1.2)

$$\gamma_r + \theta_1\gamma_{r-1} + \ldots + \theta_q\gamma_{r-q} = 0 \qquad \forall r \geqslant q \tag{1.6}$$

En outre, de Brockwell et Davis (1990) p107, on peut écrire $\gamma_r = \sum_{i=1}^{j} \sum_{n=0}^{r_i-1} c_{in} r^n \alpha_i^{-r}$ où les α_i sont les racines distinctes de $1+\theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$ et où r_i est l'ordre de multiplicité de $\alpha_i, i = 1, \ldots, j$. On obtient donc

$$\boxed{b_r = \sum_{i=1}^{j} \sum_{n=0}^{r_i-1} c_{in} r^n \alpha_i^{-r} \qquad \forall r \geqslant q+1}. \tag{1.7}$$

De façon similaire

$$\begin{aligned} a_r = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\delta_r) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_{r-p})\varphi_p + \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_{r-p+1})\varphi_{p-1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_r)\varphi_0 \\ &= \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_{r-l})\varphi_l \\ &\stackrel{N}{=} \sum_{l=0}^{p} \gamma'_{r-l}\varphi_l. \end{aligned}$$

Mais de (1.6),

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_r) = -\left(\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_{r-1}) + \ldots + \theta_q \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\gamma_{r-q})\right) - \gamma_{r-1}. \tag{1.8}$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} \gamma'_r + \theta_1\gamma'_{r-1} + \ldots + \theta_q\gamma'_{r-q} = -\gamma_{r-1} & \forall r \geqslant q \\ \gamma_r + \theta_1\gamma_{r-1} + \ldots + \theta_q\gamma_{r-q} = 0 & \forall r \geqslant q \end{cases} \tag{1.9}$$

Posons pour simplifier la notation $\theta_0 = 1$. Alors de ce système d'équations on trouve

$$0 = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \gamma_{r-j} = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \left(-\sum_{i=0}^{q} \theta_i \gamma'_{r-j-i+1} \right) \qquad \forall r \geqslant 2q-1 \tag{1.10}$$

On regroupe les termes en γ ayant même valeur de $j+i=h$ pour obtenir

$$0 = -\sum_{h=0}^{2q} \gamma'_{r-h+1} \sum_{i+j=h} \theta_i\theta_j = \sum_{h=0}^{2q} A_h \gamma'_{r-h+1} \qquad \text{avec} \qquad A_h = \sum_{i+j=h} \theta_i\theta_j. \tag{1.11}$$

D'où

$$\gamma'_r + \sum_{h=1}^{2q} A_h \gamma'_{r-h} = 0 \qquad \forall r \geqslant 2q \tag{1.12}$$

Donc, toujours d'après Brockwell et Davis (1990), on a

$$\gamma'_r = \sum_{i=1}^{j} \sum_{l=0}^{r_i-1} c_{il} r^l \alpha_i^{-r} \qquad r \geqslant 2q \tag{1.13}$$

où les α_i sont les racines distinctes de $1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{2q} z^{2q}$ et r_i est l'ordre de multiplicité de $\alpha_i, i = 1, \ldots, j$. Or

$$\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i z^i \right)^2 = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q} \theta_i \theta_j z^{i+j} = \sum_{h=0}^{2q} \left(\sum_{i+j=h} \theta_i \theta_j \right) z^h = \sum_{h=0}^{2q} A_h z^h \tag{1.14}$$

où $A_0 = \theta_0^2 = 1$, ce qui montre que les racines de $1 + A_1 z + \ldots + A_{2q} z^{2q}$ sont exactement les mêmes que les racines de $1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$, mis à part l'ordre de multiplicité, et donc on obtient

$$\boxed{a_r = \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{r_i-1} c_{ik} (r-l)^k \alpha_i^{-(r-l)} \varphi_l \qquad \forall r \geqslant 2q + p} \tag{1.15}$$

2 La convergence

On veut montrer la convergence en probabilité

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} h(U_t) \right]. \tag{1.16}$$

Ceci est équivalent à montrer les $p + q + 1$ convergences

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \sum\limits_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}} h(U_t) \right] & \forall i = 1, \ldots, p \\ \frac{1}{T} \sum\limits_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \theta_i} h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}} h(U_t) \right] & \forall i = 1, \ldots, q \\ \frac{1}{T} \sum\limits_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial \sigma} h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial \sigma} h(U_t) \right] & \end{cases} \tag{1.17}$$

Montrons que $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial\varphi_1}h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_1}h(U_t)\right]$. On va utiliser le théorème 1. Posons, en utilisant l'expression de b_r déjà obtenue,

$$X_t = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}h(U_t) =$$

$$-\frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)h'(x)\Big|_{x=2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1}\left[Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left[\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)},\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right]}_{\stackrel{N}{=}b_r}\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]$$

$$\stackrel{N}{=} f(\epsilon_t)\left[Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]$$

Montrons que $\{X_t\}$ est stationnaire.

$$E[X_t] = E\left[f(\epsilon_t)\left(Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right)\right]$$

$$= E\left[f(\epsilon_t)\right]\underbrace{E\left[Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]}_{=0} = 0$$

$$V(X_t) = E\left[f(\epsilon_t)^2\left(Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right)^2\right]$$

$$= E\left[f(\epsilon_t)\right]^2 E\left[Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]^2 < \infty$$

Soit $h > K > 0$ avec K assez grand et écrivons $\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t)$. On va montrer que $\gamma(h) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et le lecteur pourra s'assurer au cours du calcul que $\gamma(h)$ ne dépend que de h et pas de t.

$$
\begin{aligned}
|\gamma(h)| &= |Cov(X_t, X_{t+h})| \\
&= \left| E(X_t X_{t+h}) - \underbrace{E(X_t)}_{=0}\underbrace{E(X_{t+h})}_{=0} \right| \\
&= |E(X_t X_{t+h})| \\
&= \left| E\left[f(\epsilon_t) \left[Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} Y^{(q)}_{\underset{\sim}{t-1-r}} \right] f(\epsilon_{t+h}) \left[Y_{t+h-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} Y^{(q)}_{t+\underset{\sim}{h}-1-r} \right]\right]\right| \\
&= |E[f(\epsilon_{t+h})]| \left| \underbrace{E\left[f(\epsilon_t) \left[Y_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} Y^{(q)}_{\underset{\sim}{t-1-r}} \right] \left[Y_{t+h-1} - \sum_{r=0}^{\infty} b_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} Y^{(q)}_{t+\underset{\sim}{h}-1-r} \right]\right]}_{①} \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|①| = \Bigg| & E[f(\epsilon_t) Y_{t-1} Y_{t+h-1}] \\
& - \sum_{r=0}^{\infty} b_r \sum_{j=1}^{q} \theta_j E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-j} Y_{t+h-1}] \\
& - \sum_{r=0}^{\infty} b_r \sum_{j=1}^{q} \theta_j E[f(\epsilon_t) Y_{t-1} Y_{t+h-r-j}] \\
& + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty} b_r b_{r'} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \theta_i \theta_j E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-i} Y_{t+h-r'-j}] \Bigg|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant & \underbrace{|E[f(\epsilon_t) Y_{t-1} Y_{t+h-1}]|}_{②} \\
& + \sum_{j=1}^{q} |\theta_j| \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |b_r E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-j} Y_{t+h-1}]|}_{③} \\
& + \sum_{j=1}^{q} |\theta_j| \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |b_r E[f(\epsilon_t) Y_{t-1} Y_{t+h-r-j}]|}_{④} \\
& + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} |\theta_i \theta_j| \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty} |b_r b_{r'} E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-i} Y_{t+h-r'-j}]|}_{⑤}
\end{aligned}
$$

Montrons que ②,③,④ et ⑤ $\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Examinons ② $= \left|E\left[f(\epsilon_t)Y_{t-1}Y_{t+h-1}\right]\right|$.

D'après la définition 3.2.1 p89 de Brockwell et Davis (1990), l'exemple 3.2.3 et le théorème 3.1.1, on peut écrire

$$Y_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-1-j} \qquad \text{et} \qquad Y_{t+h-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-1-j+h} \tag{1.18}$$

Donc

$$\begin{aligned}
② = & \left|E\left[f(\epsilon_t)\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\epsilon_{t-1-i}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-1-j+h}\right]\right| \\
& \leqslant \underbrace{\left|E\left[f(\epsilon_t)\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\epsilon_{t-1-i}\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\epsilon_{t-1-j+h}\right]\right|}_{=0} \\
& + \left|E\left[f(\epsilon_t)\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\epsilon_{t-1-i}\sum_{j=h}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-1-j+h}\right]\right| \\
& = \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| . \left|E\left[\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\epsilon_{t-1-i}\sum_{j=h}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-1-j+h}\right]\right| \\
& = \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| . \left|\sigma^2\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\psi_{i+h}\right| \\
& \leqslant \sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\sum_{i=0}^{\infty}\left|\psi_i\psi_{i+h}\right| \\
& = \sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left|\psi_n\psi_{n+h}\right| \\
& = \underbrace{\sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\sum_{n=0}^{m-1}\left|\psi_n\underbrace{\psi_{n+h}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}\right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; si \; |\xi_i|>1} \\
& \qquad + \sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\sum_{n=m}^{\infty}\left|\psi_n\psi_{n+h}\right|
\end{aligned}$$

car, d'après Brockwell et Davis (1990) p92, on a $\psi_n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_{ij} n^j \xi_i^{-n}$ pour $n \geqslant max(p, q+1) - p = m$

où les ξ_i sont les racines distinctes de $\sum_{j=0}^{p} \phi_j z^j$ et r_i est l'ordre de multiplicité de $\xi_i, i = 1, \ldots, k$.

Donc

$$② \leqslant o(1) + \sigma^2 \left| E\left[f(\epsilon_t) \right] \right| \sum_{n=m}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_{ij} n^j \xi_i^{-n} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{j'=0}^{r_{i'}-1} \alpha_{i'j'} (n+h)^{j'} \xi_{i'}^{-(n+h)} \right|$$

$$\leqslant o(1) + \sigma^2 \left| E\left[f(\epsilon_t) \right] \right| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{j'=0}^{r_{i'}-1} \left| \alpha_{ij} \alpha_{i'j'} \right| \left| \xi_{i'} \right|^{-h} \sum_{n=m}^{\infty} n^j \left| \xi_i \xi_{i'} \right|^{-n} \underbrace{(n+h)^{j'}}_{\sum_{l=0}^{j'} \mathcal{C}_{j'}^{l} h^{j'-l} n^l}$$

$$= o(1) + \sigma^2 \left| E\left[f(\epsilon_t) \right] \right| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{j'=0}^{r_{i'}-1} \sum_{l=0}^{j'} \left| \alpha_{ij} \alpha_{i'j'} \right| \underbrace{\left| \xi_{i'} \right|^{-h} h^{j'-l}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; si \; |\xi_i|>1} \mathcal{C}_{j'}^{l} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} n^{j+l} \left| \xi_i \xi_{i'} \right|^{-n}}_{\substack{<\infty \text{ si } |\xi_i \xi_{i'}|>1 \\ \text{(d'Alembert)}}} .$$

Donc $② \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; si \; |\xi_i| > 1 \; \forall i$.

Examinons maintenant ③

$$
\begin{aligned}
③ = \sum_{r=0}^{\infty} &\left| b_r E\left[f(\epsilon_t) Y_{t-r-j} Y_{t+h-1}\right]\right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left| b_r E\left[f(\epsilon_t) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-r-j-i} \sum_{i'=0}^{\infty} \psi_{i'} \epsilon_{t+h-1-i'} \right]\right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left| b_r \underbrace{E\left[f(\epsilon_t) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-r-j-i} \sum_{i'=0}^{h+j-2} \psi_{i'} \epsilon_{t+h-1-i'} \right]}_{=0} \right. \\
&\quad \left. + b_r E\left[f(\epsilon_t) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-r-j-i} \sum_{i'=h+j-1}^{\infty} \psi_{i'} \epsilon_{t+h-1-i'} \right]\right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left| b_r E\left[f(\epsilon_t) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-r-j-i} \sum_{i'=h+j-1}^{\infty} \psi_{i'} \epsilon_{t+h-1-i'} \right]\right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left| b_r \sigma^2 E\left[f(\epsilon_t)\right] \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{h-1+r+j+i} \right| \\
&\leqslant \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \sum_{r=0}^{\infty} |b_r \psi_{h-1+r+j+i}| \\
&= \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \sum_{r=0}^{q} |b_r \psi_{h-1+r+j+i}| \\
&\quad + \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \sum_{r=q+1}^{\infty} |b_r \psi_{h-1+r+j+i}| \\
&= \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{r=0}^{q} |b_r| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i \psi_{h-1+r+j+i}| \\
+\sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| &\sum_{r=q+1}^{\infty} \left| \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} c_{ab} r^b \alpha_a^{-r} \sum_{a'=1}^{k'} \sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \alpha_{a'b'} (h-1+r+j+i)^{b'} \xi_{a'}^{-(h-1+r+j+i)} \right|
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \left[\sum_{r=0}^{q} |b_r| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i \psi_{h-1+r+j+i}|\right.$$

$$\left. + \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\sum_{a'=1}^{k'}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \left|c_{ab}\alpha_{a'b'}\xi_{a'}^{-(h-1+j)}\right| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \, |\xi_{a'}|^{-i} \sum_{r=q+1}^{\infty} r^b \alpha_a^{-r} \xi_{a'}^{-r} \underbrace{(h-1+r+j+i)^{b'}}_{\sum_{c=0}^{b'} \mathcal{C}_{b'}^{c}(h-1+j+i)^{b'-c} r^c}\right]$$

$$\leqslant \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{r=0}^{q} |b_r| \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i \psi_{h-1+r+j+i}|}_{(*)} + \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \times$$

$$\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\sum_{a'=1}^{k'}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1}\sum_{c=0}^{b'} \underbrace{\left|c_{ab}\alpha_{a'b'}\xi_{a'}^{-(h-1+j)}\mathcal{C}_{b'}^{c}\right| \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \, |\xi_{a'}|^{-i} (h-1+j+i)^{b'-c} \sum_{r=q+1}^{\infty} r^{b+c} |\alpha_a \xi_{a'}|^{-r}}_{(**)}$$

Montrons que $(*)$ et $(**) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
On pose $m = max(p, q+1) - p$.

$$(*) = \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i \psi_{h-1+r+j+i}| = \sum_{i=0}^{m-1} \left|\psi_i \underbrace{\psi_{h-1+r+j+i}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}\right| + \sum_{i=m}^{\infty} |\psi_i \psi_{h-1+r+j+i}| \quad (1.19)$$

Or

$$\sum_{i=m}^{\infty} |\psi_i \psi_{h-1+r+j+I}|$$

$$= \sum_{i=m}^{\infty} \left| \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1} \alpha_{ab} i^b \xi_a^{-i} \sum_{a'=1}^{k}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \alpha_{a'b'} (h-1+r+j+i)^{b'} \xi_{a'}^{-(h-1+r+j+i)} \right|$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\sum_{a'=1}^{k}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \left|\alpha_{ab}\alpha_{a'b'}\xi_{a'}^{-(h-1+r+j)}\right| \sum_{i=m}^{\infty} i^b |\xi_a \xi_{a'}|^{-i} \underbrace{(h-1+r+j+i)^{b'}}_{\sum_{c=0}^{b'} \mathcal{C}_{b'}^{c}(h-1+r+j)^{b'-c} i^c}$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\sum_{a'=1}^{k}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1}\sum_{c=0}^{b'} \left|\alpha_{ab}\alpha_{a'b'} \underbrace{\xi_{a'}^{-(h-1+r+j)}(h-1+r+j)^{b'-c}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; si \; |\xi_i|>1 \; \forall i} \mathcal{C}_{b'}^{c}\right| \underbrace{\sum_{i=m}^{\infty} i^{b+c} |\xi_a \xi_{a'}|^{-i}}_{\substack{<\infty \text{ si } |\xi_a \xi_{a'}|>1 \\ \text{(d'Alembert)}}}$$

Donc $(*) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *si* $|\xi_a| > 1\ \forall a$.

De la même façon

$$(**) = |c_{ab}\alpha_{a'b'}\mathcal{C}^c_{b'}|\,|\xi_{a'}|^{-(h-1+j)}\sum_{i=0}^{\infty}|\psi_i|\,|\xi_{a'}|^{-i}\,(h{-}1{+}j{+}i)^{b'-c}\underbrace{\sum_{r=q+1}^{\infty} r^{b+c}\,|\alpha_a\xi_{a'}|^{-r}}_{\substack{=\beta_{b,c,a,a'}<\infty\\ \text{si } |\alpha_a\xi_{a'}|>1\\ \text{(d'Alembert)}}}$$

$$= \beta_{b,c,a,a'}\,|c_{ab}\alpha_{a'b'}\mathcal{C}^c_{b'}|\,|\xi_{a'}|^{-(h-1+j)}\sum_{i=0}^{\infty}|\psi_i|\,|\xi_{a'}|^{-i}\ \underbrace{(h-1+j+i)^{b'-c}}_{\sum_{d=0}^{b'-c}\mathcal{C}^d_{b'-c}(h-1+j)^{b'-c-d}i^d}$$

$$\leqslant \sum_{d=0}^{b'-c}|\beta_{b,c,a,a'}c_{ab}\alpha_{a'b'}\mathcal{C}^c_{b'}|\left|\xi_{a'}^{-(h-1+j)}(h-1+j)^{b'-c-d}i^d\right|\sum_{i=0}^{\infty}|\psi_i|\,|\xi_{a'}|^{-i}\,i^d$$

$$= \sum_{d=0}^{b'-c}\sum_{i=0}^{m-1}\left|\beta_{b,c,a,a'}c_{ab}\alpha_{a'b'}\mathcal{C}^c_{b'}\psi_i\xi_{a'}^{-i}i^d\right|.\underbrace{\left|\xi_{a'}^{-(h-1+j)}(h-1+j)^{b'-c-d}i^d\right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow}0\ si\ |\xi_{a'}|>1}$$

$$+\sum_{d=0}^{b'-c}|\beta_{b,c,a,a'}c_{ab}\alpha_{a'b'}\mathcal{C}^c_{b'}|\,.\underbrace{\left|\xi_{a'}^{-(h-1+j)}(h-1+j)^{b'-c-d}i^d\right|\sum_{i=m}^{\infty}|\psi_i|\,|\xi_{a'}|^{-i}\,i^d}_{(***)}.$$

Or

$$(***) = |\xi_{a'}|^{-(h-1+j)}\,(h-1+j)^{b'-c-d}\sum_{i=m}^{\infty}\left|\sum_{e=1}^{k}\sum_{f=0}^{r_e-1}\alpha_{ef}i^f\xi_e^{-i}\xi_{a'}^{-i}\right|i^d$$

$$\leqslant \underbrace{|\xi_{a'}|^{-(h-1+j)}\,(h-1+j)^{b'-c-d}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow}0\ si\ |\xi_{a'}|>1}\sum_{e=1}^{k}\sum_{f=0}^{r_e-1}|\alpha_{ef}|\underbrace{\sum_{i=m}^{\infty}i^{f+d}\,|\xi_e\xi_{a'}|^{-i}}_{\substack{<\infty\text{ si }|\xi_e\xi_{a'}|>1\\ \text{(d'Alembert)}}}$$

Donc $(***) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *si* $|\xi_a| > 1\ \forall a$, ce qui à son tour implique $(**) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entrainant ③ $\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Examinons ④

$$
\begin{aligned}
④ = \sum_{r=0}^{\infty} & \left| b_r E\left[f(\epsilon_t) Y_{t-1} Y_{t+h-r-j}\right]\right| \\
& = \sum_{r=0}^{\infty} \left| b_r E\left[f(\epsilon_t) \sum_{a=0}^{\infty} \psi_a \epsilon_{t-1-a} \sum_{a'=0}^{\infty} \psi_{a'} \epsilon_{t+h-r-j-a'}\right]\right| \\
& \leqslant \sum_{r=0}^{h-j+1} \left| b_r E\left[f(\epsilon_t) \sum_{a=0}^{\infty} \psi_a \epsilon_{t-1-a} \sum_{a'=0}^{\infty} \psi_{a'} \epsilon_{t+h-r-j-a'}\right]\right| \\
& + \sum_{r=h-j+2}^{\infty} \left| b_r \underbrace{E\left[f(\epsilon_t) \sum_{a=0}^{r+j-2-h} \psi_a \epsilon_{t-1-a} \sum_{a'=0}^{\infty} \psi_{a'} \epsilon_{t+h-r-j-a'}\right]}_{=0}\right| \\
& + \sum_{r=h-j+2}^{\infty} \left| b_r E\left[f(\epsilon_t) \sum_{a=r+j-1-h}^{\infty} \psi_a \epsilon_{t-1-a} \sum_{a'=0}^{\infty} \psi_{a'} \epsilon_{t+h-r-j-a'}\right]\right| \\
& = \sum_{r=0}^{h-j+1} \left| b_r \sigma^2 E\left[f(\epsilon_t)\right] \sum_{a=0}^{\infty} \psi_a \psi_{a+h-j-r+1}\right| \\
& + \sum_{r=h-j+2}^{\infty} \left| b_r \sigma^2 E\left[f(\epsilon_t)\right] \sum_{a=r+j-1-h}^{\infty} \psi_a \psi_{a+h-j-r+1}\right| \\
& \leqslant \sum_{r=0}^{h-j+1} \left| b_r \sigma^2 E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{a=0}^{\infty} \left|\psi_a \psi_{a+h-j-r+1}\right| \\
& + \underbrace{\sum_{r=h-j+2}^{\infty} \left| b_r \sigma^2 E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{a=0}^{\infty} \left|\psi_a \psi_{a+h-j-r+1}\right|}_{\text{reste d'une série convergente donc } \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}
$$

Il reste à montrer que $\sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r| \sum_{a=0}^{\infty} |\psi_a \psi_{a+h-j-r+1}| \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Posons $m = max(p, q+1) - p$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r| \sum_{a=0}^{\infty} |\psi_a \psi_{a+h-j-r+1}| \\
&= \sum_{a=0}^{m-1} |\psi_a| \underbrace{\sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r \psi_{a+h-j-r+1}|}_{(*)} \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r| \sum_{a=m}^{\infty} |\psi_a \psi_{a+h-j-r+1}|}_{(**)}
\end{aligned}
$$

Montrons que chacun des termes $(*)$ et $(**) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$
\begin{aligned}
(*) = \sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r \psi_{a+h-j-r+1}| \\
&= \sum_{r=0}^{h-j+1+a-m} |b_r \psi_{a+h-j-r+1}| \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{r=h+a-j+1-m+1}^{h-j+1} |b_r \psi_{a+h-j-r+1}|}_{\text{reste d'une série convergente} \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}
$$

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{h-j+1+a-m} |b_r \psi_{a+h-j-r+1}| = \sum_{r=0}^{q} \Bigg| b_r \underbrace{\psi_{a+h-j-r+1}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0} \Bigg| \\
&\qquad + \sum_{r=q+1}^{h-j+1+a-m} |b_r \psi_{a+h-j-r+1}| .
\end{aligned}
$$

Mais

$$\sum_{r=q+1}^{h-j+1+a-m} \left|b_r \psi_{a+h-j-r+1}\right|$$

$$= \sum_{r=q+1}^{h-j+1+a-m} \left| \sum_{b=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_b-1} c_{bl} r^l \alpha_a^{-r} \sum_{b'=1}^{k'} \sum_{l'=0}^{r_{b'}-1} \alpha_{b'l'} \underbrace{(a+h-j-r+1)^{l'}}_{\sum_{d=0}^{l'} \mathcal{C}_{l'}^{d}((a+h-j+1)^{l'-d}(-r)^d} \xi_{b'}^{-(a+h-j-r+1)} \right|$$

$$\leqslant \sum_{b=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_b-1} \sum_{b'=1}^{k'} \sum_{l'=0}^{r_{b'}-1} \sum_{d=0}^{l'} \left|c_{bl} \alpha_{b'l'} \mathcal{C}_{l'}^{d}\right| . \underbrace{\left|\xi_{b'}^{-(a+h-j+1)} (a+h-j+1)^{l'-d}\right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ si\ |\xi_{b'}|>1} \underbrace{\sum_{r=q+1}^{h-j+1+a-m} r^{l+d} \left|\alpha_a\right|^{-r} \left|\xi_{b'}\right|^{r}}_{\substack{<\infty \text{ si } |\xi_{b'}|<|\alpha_a| \\ \text{(d'Alembert)}}} .$$

Donc $(*) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si $|\xi_a| > 1$ $\forall a$ et si $|\xi_a| < |\alpha_b|$ $\forall a$ $\forall b$.
Maintenant,

$$(**) = \sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r| \sum_{a=m}^{\infty} \left|\psi_a \psi_{a+h-j-r+1}\right|$$

$$= \sum_{r=0}^{h-j+1} |b_r| \sum_{a=m}^{\infty} \left| \sum_{b=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_b-1} \alpha_{bl} a^l \xi_b^{-a} \sum_{b'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{r_{b'}-1} \alpha_{b'l'} (a+h-j-r+1)^{l'} \xi_{b'}^{-(a+h-j-r+1)} \right|$$

$$\leqslant \sum_{b=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_b-1} \sum_{b'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{r_{b'}-1} \left|\alpha_{bl} \alpha_{b'l'} \xi_{b'}^{-(-j+1)}\right| \sum_{r=0}^{h-j+1} \left|b_r \xi_{b'}^{-(h-r)}\right| \sum_{a=m}^{\infty} \underbrace{(a+h-j-r+1)^{l'}}_{\sum_{d=0}^{l'} \mathcal{C}_{l'}^{d} (h-j-r+1)^{l'-d} a^d} a^l \left|\xi_b \xi_{b'}\right|^{-a}$$

$$\leqslant \sum_{b=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_b-1} \sum_{b'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{r_{b'}-1} \sum_{d=0}^{l'} \left|\alpha_{bl} \alpha_{b'l'} \xi_{b'}^{-(-j+1)} \mathcal{C}_{l'}^{d}\right| \sum_{r=0}^{h-j+1} \left|b_r \xi_{b'}^{-(h-r)} (h-j-r+1)^{l'-d}\right| \underbrace{\sum_{a=m}^{\infty} a^{l+d} \left|\xi_b \xi_{b'}\right|^{-a}}_{\substack{\overset{N}{=} \beta_{l,d,b,b'} < \infty \\ \text{si } |\xi_b \xi_{b'}|>1 \\ \text{(d'Alembert)}}}$$

$$\leqslant \sum_{b=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_b-1} \sum_{b'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{r_{b'}-1} \sum_{d=0}^{l'} \left|\alpha_{bl} \alpha_{b'l'} \xi_{b'}^{-(-j+1)} \mathcal{C}_{l'}^{d} \beta_{l,d,b,b'}\right| \underbrace{\sum_{r=0}^{h-j+1} \left|b_r \xi_{b'}^{-(h-r)} (h-j-r+1)^{l'-d}\right|}_{(***)} .$$

Or

$$(***) \leqslant \underbrace{\sum_{r=0}^{q} \left| b_r \xi_{b'}^{-(h-r)} (h-j-r+1)^{l'-d} \right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ si \ |\xi_{b'}|>1} + \sum_{r=q+1}^{\infty} \left| b_r \xi_{b'}^{-(h-r)} (h-j-r+1)^{l'-d} \right|$$

avec

$$\begin{aligned}
\sum_{r=q+1}^{\infty} & \left| b_r \xi_{b'}^{-(h-r)} \underbrace{(h-j-r+1)^{l'-d}}_{\sum_{e=0}^{l'-d} \mathcal{C}_{l'-d}^{e} (h-j+1)^{l'-d-e} (-r)^e} \right| \\
& \leqslant \sum_{e=0}^{l'-d} \mathcal{C}_{l'-d}^{e} \left|\xi_{b'}\right|^{-h} (h-j+1)^{l'-d-e} \sum_{r=q+1}^{\infty} |b_r| \left|\xi_{b'}\right|^r r^e \\
& = \sum_{e=0}^{l'-d} \mathcal{C}_{l'-d}^{e} \left|\xi_{b'}\right|^{-h} (h-j+1)^{l'-d-e} \sum_{r=q+1}^{\infty} \left| \sum_{u=1}^{k} \sum_{v=0}^{r_u-1} c_{uv} r^v \alpha_u^{-r} \right| \left|\xi_{b'}\right|^r r^e \\
& \leqslant \sum_{e=0}^{l'-d} \sum_{u=1}^{k} \sum_{v=0}^{r_u-1} \left| \mathcal{C}_{l'-d}^{e} c_{uv} \right| . \underbrace{\left| \xi_{b'}^{-h} (h-j+1)^{l'-d-e} \right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ si \ |\xi_{b'}|>1} \underbrace{\sum_{r=q+1}^{\infty} r^{v+e} \left|\alpha_u\right|^{-r} \left|\xi_{b'}\right|^r}_{\substack{<\infty \text{ si } |\xi_{b'}|<|\alpha_a| \\ \text{(d'Alembert)}}} .
\end{aligned}$$

Donc ④ $\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Examinons ⑤.

On a

$$
\begin{aligned}
⑤ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} \left|b_r b_{r'} E\left[f(\epsilon_t) Y_{t-r-i} Y_{t+h-r'-j}\right]\right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} \left|b_r b_{r'} E\left[f(\epsilon_t) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \epsilon_{t-r-i-n} \sum_{n'=0}^{\infty} \psi_{n'} \epsilon_{t+h-r'-j-n'}\right]\right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r} \left|b_r b_{r'} E\left[f(\epsilon_t) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \epsilon_{t-r-i-n} \sum_{n'=0}^{\infty} \psi_{n'} \epsilon_{t+h-r'-j-n'}\right]\right| \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=h+i-j+r+1}^{\infty} |b_r b_{r'}| \left| \underbrace{E\left[f(\epsilon_t) \sum_{n=0}^{n'+j-h-i-r-1} \psi_n \epsilon_{t-r-i-n} \sum_{n'=0}^{\infty} \psi_{n'} \epsilon_{t+h-r'-j-n'}\right]}_{=0} \right. \\
&\left. + E\left[f(\epsilon_t) \sum_{n=n'+j-h-i-r}^{\infty} \psi_n \epsilon_{t-r-i-n} \sum_{n'=0}^{\infty} \psi_{n'} \epsilon_{t+h-r'-j-n'}\right] \right| \\
&\leqslant \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_r b_{r'}|\, \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n \psi_{r+i+n+h-r'-j}| \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=h+i-j+r+1}^{\infty} |b_r b_{r'}|\, \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{n=r'+j-h-i-r}^{\infty} |\psi_n \psi_{r+i+n+h-r'-j}| \\
&\leqslant \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_r b_{r'}|\, \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n \psi_{r+i+n+h-r'-j}| \\
&+ \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=h+i-j+r+1}^{\infty} |b_r b_{r'}|\, \sigma^2 \left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right| \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n \psi_{r+i+n+h-r'-j}|}_{\text{reste d'une série convergente } \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}
$$

Posons $m = max(p, q+1) - p$.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r}|b_r b_{r'}|\sum_{n=0}^{\infty}|\psi_n\psi_{r+i+n+h-r'-j}|$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1}|\psi_n|\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r}|b_r b_{r'}|\,|\psi_{r+i+n+h-r'-j}|}_{(*)}$$

$$+\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r}|b_r b_{r'}|\sum_{n=m}^{\infty}|\psi_n\psi_{r+i+n+h-r'-j}|}_{(**)}$$

$$(*) \leqslant \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}|b_r b_{r'}|\,|\psi_{r+i+n+h-r'-j}|$$

$$+\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=h+i-j+r-m+1}^{\infty}|b_r b_{r'}|\,|\psi_{r+i+n+h-r'-j}|}_{\text{reste d'une série convergente }\underset{h\to\infty}{\longrightarrow}0}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}|b_r b_{r'}|\,|\psi_{r+i+n+h-r'-j}|$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}|b_r b_{r'}|\left|\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\alpha_{ab}(r+i+n+h-r'-j)^b\xi_a^{-(r+i+n+h-r'-j)}\right|$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\left|\alpha_{ab}\xi_a^{-(i+n-j)}\right|\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-(r+h)}\right|\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}|b_{r'}|\,|\xi_a|^{r'}(r+i+n+h-r'-j)^b$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-(r+h)}\right|\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}|b_{r'}|\,|\xi_a|^{r'}\underbrace{(r+i+n+h-r'-j)^b}_{\sum_{d=0}^{b}\mathcal{C}_b^d\underbrace{(r+i+n+h-j)^{b-d}}_{\sum_{l=0}^{b-d}\mathcal{C}_{b-d}^l(i+n+h-j)^{b-d-l}r^l}(-r')^d}$$

$$\leqslant \sum_{d=0}^{b}\sum_{l=0}^{b-d}\left|\mathcal{C}_b^d\mathcal{C}_{b-d}^l\right|\cdot\underbrace{\left|\xi_a^{-h}(i+n+h-j)^{b-d-l}\right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow}0}\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-r}r^l\right|\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}|b_{r'}|\,|\xi_a|^{r'}r'^d$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-r}r^l\right|\sum_{r'=0}^{h+i-j+r-m}\left|b_{r'}\right|\left|\xi_a\right|^{r'}r'^d$$
$$=\sum_{r'=0}^{q}\left|b_{r'}\right|\left|\xi_a\right|^{r'}r'^d\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-r}r^l\right|}_{(1)}$$
$$+\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-r}r^l\right|\sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r-m}\left|b_{r'}\right|\left|\xi_a\right|^{r'}r'^d}_{(2)}$$

$$(1)=\sum_{r=0}^{r=q}\left|b_r\right|\left|\xi_a\right|^{-r}r^l+\sum_{r=q+1}^{r=\infty}\left|b_r\right|\left|\xi_a\right|^{-r}r^l \tag{1.20}$$

$$\sum_{r=q+1}^{r=\infty}\left|b_r\right|\left|\xi_a\right|^{-r}r^l$$
$$=\sum_{r=q+1}^{r=\infty}\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}r^j\alpha_i^{-r}\right|\left|\xi_a\right|^{-r}r^l$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{r_i-1}\left|c_{ij}\right|\underbrace{\sum_{r=q+1}^{r=\infty}r^{j+l}\left|\xi_a\alpha_i\right|^{-r}}_{\substack{<\infty \text{ si } |\xi_a\alpha_i|>1\\ \text{(d'Alembert)}}}$$

Donc $(1)<\infty$.

$$(2)=\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-r}r^l\right|\sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r-m}\left|\sum_{d=1}^{k}\sum_{e=0}^{r_d-1}c_{de}r'^e\alpha_d^{-r'}\right|\left|\xi_a\right|^{r'}r'^d$$
$$\leqslant\sum_{d=1}^{k}\sum_{e=0}^{r_d-1}\left|c_{de}\right|\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\left|b_r\xi_a^{-r}r^l\right|}_{=(1)<\infty}\underbrace{\sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r-m}r'^{e+d}\left|\alpha_d\right|^{-r'}\left|\xi_a\right|^{r'}}_{\substack{<\infty \text{ quand } h\to\infty \text{ si } |\alpha_d|>|\xi_a|\\ \text{(d'Alembert)}}}<\infty$$

Donc $(*) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$(**) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_r b_{r'}| \sum_{n=m}^{\infty} |\psi_n \psi_{r+i+n+h-r'-j}|$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_r b_{r'}|\,.$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} \alpha_{ab} n^b \xi_a^{-n} \sum_{a'=1}^{k} \sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \alpha_{a'b'} (r+i+n+h-r'-j)^{b'} \xi_{a'}^{-(r+i+n+h-r'-j)} \right|$$
$$\leqslant \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} \sum_{a'=1}^{k} \sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} |\alpha_{ab}\alpha_{a'b'}| \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_r b_{r'}|\,.$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^b \xi_a^{-n} \underbrace{(r+i+n+h-r'-j)^{b'}}_{\sum_{u=0}^{b'} \mathcal{C}_{b'}^{u} (r+i+h-r'-j)^{b'-u} n^u} \xi_{a'}^{-(r+i+n+h-r'-j)}$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} \sum_{a'=1}^{k} \sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \sum_{u=0}^{b'} \left| \alpha_{ab}\alpha_{a'b'} \mathcal{C}_{b'}^{u} \xi_{a'}^{-(i-j)} \right|.$$

$$\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\, |\xi_{a'}|^{-(r+h)} \sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_{r'}|\, |\xi_{a'}|^{r'} (r+i+h-r'-j)^{b'-u}}_{(1)} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} n^{b+u} |\xi_a \xi_{a'}|^{-n}}_{\substack{<\infty \text{ si } |\xi_a\xi_{a'}|>1 \\ \text{(d'Alembert)}}}$$

$$(1) = \sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-(r+h)} \sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_{r'}|\,|\xi_{a'}|^{r'} \underbrace{(r+i+h-r'-j)^{b'-u}}_{\sum_{v=0}^{b'-u} \mathcal{C}_{b'-u}^{v}} \times$$

$$\underbrace{(r+i+h-j)^{b'-u-v}}_{\sum_{w=0}^{b-u-v} \mathcal{C}_{b'-u-v}^{w} (i+h-j)^{b'-u-v-w} r^w \,(-r')^v}$$

$$\leqslant \sum_{v=0}^{b'-u} \sum_{w=0}^{b-u-v} \mathcal{C}_{b'-u}^{v} \mathcal{C}_{b'-u-v}^{w} \underbrace{|\xi_{a'}|^{-h}\,(i+h-j)^{b'-u-v-w}}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ si\ |\xi_{a'}|>1}$$

$$\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-r}\, r^w \sum_{r'=0}^{h+i-j+r} |b_{r'}|\,|\xi_{a'}|^{r'}\, r'^v}_{(2)}$$

$$(2) = \sum_{r'=0}^{q} |b_{r'}|\,|\xi_{a'}|^{r'}\, r'^v \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-r}\, r^w}_{<\infty}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-r}\, r^w \sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r} |b_{r'}|\,|\xi_{a'}|^{r'}\, r'^v$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-r}\, r^w \sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r} |b_{r'}|\,|\xi_{a'}|^{r'}\, r'^v$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-r}\, r^w \sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r} \left| \sum_{s=0}^{k} \sum_{t=1}^{r_s-1} c_{st} r'^t \alpha_s^{-r'} \right| |\xi_{a'}|^{r'}\, r'^v$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{k} \sum_{t=1}^{r_s-1} |c_{st}| \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\,|\xi_{a'}|^{-r}\, r^w}_{<\infty} \underbrace{\sum_{r'=q+1}^{h+i-j+r} r'^v\,|\alpha_s|^{-r'}\,|\xi_{a'}|^{r'}}_{\substack{<\infty \text{ si } |\alpha_s|>|\xi_{a'}| \text{ quand } h\to\infty \\ \text{(d'Alembert)}}}$$

Donc $(2) < \infty$ et $(1) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $(**) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent ⑤$\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $|\gamma(h)| \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On obtient finalement $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}h(U_t) \xrightarrow{P} 0$. Il s'ensuivra par un raisonnement similaire que $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\varphi_i}h(U_t) \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,p$.

On va maintenant démontrer que $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\theta_1}h(U_t) \xrightarrow{P} 0$.

On va à nouveau utiliser le théorème 1.

Posons

$$X_t \stackrel{N}{=} \frac{\partial}{\partial\theta_1}h(U_t) =$$

$$-\frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)h'(x)\Big|_{x=2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1}\left[\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right]}_{\stackrel{N}{=}a_r}\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]$$

$$\stackrel{N}{=} f(\epsilon_t)\left[\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}a_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]$$

Montrons que $\{X_t\}$ est stationnaire.

$$E[X_t] =$$

$$E\left[f(\epsilon_t)\left(\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}a_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right)\right]$$

$$= E\left[f(\epsilon_t)\right]\underbrace{E\left[\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}a_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]}_{=0} = 0$$

$$V(X_t) =$$

$$E\left[f(\epsilon_t)^2\left(\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}a_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right)^2\right]$$

$$= E\left[f(\epsilon_t)\right]^2 E\left[\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty}a_r\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{Y}^{(q)}_{t-1-r}\right]^2 < \infty$$

Soit $h > K > 0$ avec K assez grand et $\gamma(h) \stackrel{N}{=} Cov(X_{t+h}, X_t)$.

On va montrer que $\gamma(h) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et le lecteur pourra s'assurer au cours du calcul que $\gamma(h)$ ne dépend que de h et pas de t.

$$|\gamma(h)| = |Cov(X_t, X_{t+h})|$$

$$\overset{déf}{=} \left| E(X_t X_{t+h}) - \underbrace{E(X_t)}_{=0}\underbrace{E(X_{t+h})}_{=0} \right|$$

$$= |E(X_t X_{t+h})|$$

$$= \left| E\left[f(\epsilon_t)\left[\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{Y}_{t-1-r}^{(q)}\right] f(\epsilon_{t+h}) \left[\epsilon_{t+h-1} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{Y}_{t+h-1-r}^{(q)}\right]\right]\right|$$

$$= |E[f(\epsilon_{t+h})]| \,.\, \left| \underbrace{E\left[f(\epsilon_t)\left(\epsilon_{t-1} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{Y}_{t-1-r}^{(q)}\right)\left(\epsilon_{t+h-1} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{Y}_{t+h-1-r}^{(q)}\right)\right]}_{①} \right|$$

$$|①| =$$

$$\Bigg| \underbrace{E[f(\epsilon_t)\epsilon_{t-1}\epsilon_{t+h-1}]}_{=0}$$

$$- \sum_{r=0}^{\infty} a_r \sum_{j=1}^{q} \theta_j \underbrace{E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-j}\epsilon_{t+h-1}]}_{0}$$

$$- \sum_{r=0}^{\infty} a_r \sum_{j=1}^{q} \theta_j E[f(\epsilon_t)\epsilon_{t-1} Y_{t+h-r-j}]$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} a_r a_{r'} \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \theta_i\theta_j E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-i} Y_{t+h-r'-j}] \Bigg|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} |\theta_j| \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} |a_r|\, |E[f(\epsilon_t)\epsilon_{t-1} Y_{t+h-r-j}]|}_{②}$$

$$+ \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} |\theta_i\theta_j| \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} |a_r a_{r'}|\, |E[f(\epsilon_t) Y_{t-r-i} Y_{t+h-r'-j}]|}_{③}$$

Montrons que ② et ③ $\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Examinons ②.

$$
\begin{aligned}
② = \sum_{r=0}^{\infty} |a_r| \left| E\left[f(\epsilon_t)\epsilon_{t-1} \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \epsilon_{t+h-r-j-l} \right] \right| \\
= \sum_{r=0}^{h-j+1} |a_r| \left| E\left[f(\epsilon_t)\epsilon_{t-1} \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \epsilon_{t+h-r-j-l} \right] \right| \\
+ \sum_{r=h-j+2}^{\infty} |a_r| \left| \underbrace{E\left[f(\epsilon_t)\epsilon_{t-1} \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \epsilon_{t+h-r-j-l} \right]}_{=0} \right| \\
= \sum_{r=0}^{h-j+1} |a_r| \, \sigma^2 \left| E\left[f(\epsilon_t) \right] \right| |\psi_{h-r-j+1}| \\
= \sigma^2 \left| E\left[f(\epsilon_t) \right] \right| \sum_{r=0}^{h-j+1} |a_r| \, |\psi_{h-r-j+1}| .
\end{aligned}
$$

Posons $m = max(p, q+1) - p$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{h-j+1} |a_r| \, |\psi_{h-r-j+1}| \\
\leqslant \sum_{r=0}^{h-j+1-m} |a_r| \, |\psi_{h-r-j+1}| \\
+ \underbrace{\sum_{r=h+1-j-m+1}^{\infty} |a_r| \, |\psi_{h-r-j+1}|}_{\text{reste d'une série convergente} \underset{h \to \infty}{\longrightarrow} 0} .
\end{aligned}
$$

Or

$$\sum_{r=0}^{h-j+1-m} |a_r| \, |\psi_{h-r-j+1}|$$
$$= \sum_{r=0}^{h-j+1-m} |a_r| \left| \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} \alpha_{ab}(h-r+1-j)^b \xi_a^{-(h-r+1-j)} \right|$$
$$\leqslant \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} |\alpha_{ab}| \sum_{r=0}^{h-j+1-m} |a_r| \underbrace{(h-r+1-j)^b}_{\sum_{l=0}^{b} \mathcal{C}_b^l (h+-j)^{b-l}(-r)^l} |\xi_a|^{-(h-r+1-j)}$$
$$\leqslant \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=0}^{r_a-1} \sum_{l=0}^{b} \left| \alpha_{ab} \mathcal{C}_b^l \xi_a^{-(1-j)} \right| \underbrace{\left| \xi_a^{-h}(h+1-j)^{b-l} \right|}_{\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; si \; |\xi_a|>1} \sum_{r=0}^{h+1-j-m} |a_r| \, r^l \, |\xi_a|^r .$$

Aussi

$$\sum_{r=0}^{h+1-j-m} |a_r| \, r^l \, |\xi_a|^r \leqslant \sum_{r=0}^{2q+p-1} |a_r| \, r^l \, |\xi_a|^r + \sum_{r=2q+p-1}^{\infty} |a_r| \, r^l \, |\xi_a|^r . \tag{1.21}$$

où

$$\sum_{r=2q+p-1}^{\infty} |a_r| \, r^l \, |\xi_a|^r$$
$$= \sum_{r=2q+p-1}^{\infty} \left| \sum_{u=0}^{p} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{r_i-1} c_{ik}(r-u)^k \alpha_i^{-(r-u)} \varphi_u \right| r^l \, |\xi_a|^r$$
$$\leqslant \sum_{u=0}^{p} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{r_i-1} |c_{ik}\alpha_i^u \varphi_u| \sum_{r=2q+p-1}^{\infty} \underbrace{(r-u)^k}_{\sum_{v=0}^{k} \mathcal{C}_k^v u^{k-v}(-r)^v} |\alpha_i|^{-r} \, r^l \, |\xi_a|^r$$
$$\leqslant \sum_{u=0}^{p} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{r_i-1} \sum_{v=0}^{k} \left| c_{ik}\alpha_i^u \varphi_u \mathcal{C}_k^v u^{k-v} \right| \underbrace{\sum_{r=2q+p-1}^{\infty} r^{v+l} \, |\alpha_i|^{-r} \, |\xi_a|^r}_{<\infty \text{ si } |\alpha_i|>|\xi_a| \text{ (d'Alembert)}}$$

Donc ② $\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; si \; |\xi_a| > 1 \; \forall a \; et \; si \; |\alpha_i| > |\xi_a| \; \forall i \, \forall a$

Examinons ③

$$
\begin{aligned}
③ = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} |a_r a_{r'}| \left|E\left[f(\epsilon_t)Y_{t-r-i}Y_{t+h-r'-j}\right]\right| \\
= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} |a_r a_{r'}| \left|E\left[f(\epsilon_t)\sum_{l=0}^{\infty}\psi_l\epsilon_{t-r-i-l}\sum_{l'=0}^{\infty}\psi_{l'}\epsilon_{t+h-r'-j-l'}\right]\right| \\
\leqslant \sum_{r=0}^{j-i+h-1}\sum_{r'=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |a_r a_{r'}|\,\sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\left|\psi_l\psi_{h-r'-j+r+i+l}\right| \\
+ \sum_{r=j-i+h}^{\infty}\sum_{r'=0}^{r+i-j-h-1}\sum_{l=0}^{\infty} |a_r a_{r'}|\,\sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\left|\psi_l\psi_{h-r'-j+r+i+l}\right| \\
+ \sum_{r=j-i+h}^{\infty}\sum_{r'=r+i-j-h}^{\infty}\sum_{l=0}^{h+r'+j-i-r-1}\sum_{l'=0}^{\infty} |a_r a_{r'}| \underbrace{\left|E\left[f(\epsilon_t)\psi_l\epsilon_{t-r-i-l}\psi_{l'}\epsilon_{t+h-r'-j-l'}\right]\right|}_{=0} \\
+ \sum_{r=j-i+h}^{\infty}\sum_{r'=r+i-j-h}^{\infty}\sum_{l=h+r'+j-i-r}^{\infty} |a_r a_{r'}|\,\sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|\left|\psi_l\psi_{h-r'-j+r+i+l}\right| \\
\stackrel{N}{=} \sigma^2\left|E\left[f(\epsilon_t)\right]\right|(④ + ⑤ + ⑥)
\end{aligned}
$$

Montrons que ④,⑤ et ⑥ $\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$④ = \sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_r a_{r'}| \, |\psi_l \psi_{h-r'-j+r+i+l}|$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} |\psi_l| \sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{\infty} |a_r a_{r'} \psi_{h-r'-j+r+i+l}|$$

$$+ \sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} |a_r a_{r'}| \, |\psi_l \psi_{h-r'-j+r+i+l}|$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} |\psi_l| \underbrace{\sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{h-j+i-m} |a_r a_{r'} \psi_{h-r'-j+r+i+l}|}_{(*)}$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} |\psi_l| \underbrace{\sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=h-j+i-m+1}^{\infty} |a_r a_{r'} \psi_{h-r'-j+r+i+l}|}_{\text{reste d'une série convergente} \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

$$+ \underbrace{\sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{h-j+i} \sum_{l=m}^{\infty} |a_r a_{r'}| \, |\psi_l \psi_{h-r'-j+r+i+l}|}_{(**)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=h-j+i+1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} |a_r a_{r'}| \, |\psi_l \psi_{h-r'-j+r+i+l}|}_{\text{reste d'une série convergente} \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Montrons que $(*)$ et $(**) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$(*) = \sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{h-j+i-m} |a_r a_{r'} \psi_{h-r'-j+r+i+l}|$$

$$= \sum_{r=0}^{j-i+h-1} |a_r| \sum_{r'=0}^{h-j+i-m} |a_{r'}| \left| \sum_{u=1}^{k} \sum_{v=0}^{r_u-1} \alpha_{uv} (h - r' - j + r + i + l)^v \xi_u^{-(h-r'-j+r+i+l)} \right|$$

$$\leqslant \sum_{u=1}^{k} \sum_{v=0}^{r_u-1} |\alpha_{uv} \xi_u - (-j+i+l)| \sum_{r=0}^{j-i+h-1} |a_r| \, |\xi_u|^{-(h+r)} \sum_{r'=0}^{h-j+i-m} |a_{r'}| \, (h-r'-j+r+i+l)^v \, |\xi_u|^{r'}$$

$$\sum_{r=0}^{j-i+h-1} |a_r|\,|\xi_u|^{-(h+r)} \sum_{r'=0}^{h-j+i-m} |a_{r'}| \quad \underbrace{(h-r'-j+r+i+l)^v}_{\sum_{a=0}^{v} \mathcal{C}_v^a \underbrace{(h-j+i+l+r)^{v-a}}_{\sum_{b=0}^{v-a} \mathcal{C}_{v-a}^b (h-j+i+l)^{v-a-b}\, r^b} (-r')^a} \quad |\xi_u|^{r'}$$

$$\leqslant \sum_{a=0}^{v}\sum_{b=0}^{v-a} \mathcal{C}_v^a \mathcal{C}_{v-a}^b \underbrace{(h-j+i+l)^{v-a-b}\,|\xi_u|^{-h}}_{\xrightarrow[h\to\infty]{} 0} \underbrace{\sum_{r=0}^{j-i+h-1} |a_r|\,|\xi_u|^{-r}\, r^b}_{<\infty} \underbrace{\sum_{r'=0}^{h-j+i-m} |a_{r'}|\,|\xi_u|^{r'}\, r'^a}_{<\infty}$$

et donc $(*) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$.

$$(**) = \sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{h-j+i} \sum_{l=m}^{\infty} |a_r a_{r'}|\,|\psi_l \psi_{h-r'-j+r+i+l}|$$

$$= \sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{h-j+i} \sum_{l=m}^{\infty} |a_r a_{r'}| \times$$

$$\left| \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1} \alpha_{ab} l^b \xi_a^{-l} \sum_{a'=1}^{k}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \alpha_{a'b'} (h-r'-j+r+i+l)^{b'} \xi_{a'}^{-(h-r'-j+r+i+l)} \right|$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\sum_{a'=1}^{k}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1} \left| \alpha_{ab}\alpha_{a'b'} \xi_{a'}^{-(-j+i)} \right| \times$$

$$\sum_{r=0}^{j-i+h-1} \sum_{r'=0}^{h-j+i} |a_r a_{r'}|\,|\xi_a|^{-(h-r'+r)} \sum_{l=m}^{\infty} l^b\,|\xi_a|^{-l}\,(h-r'-j+r+i+l)^{b'}\,|\xi_{a'}|^{-l}$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=0}^{r_a-1}\sum_{a'=1}^{k}\sum_{b'=0}^{r_{a'}-1}\sum_{u=0}^{b'}\sum_{v=0}^{b'-u}\sum_{w=0}^{b'-u-v} \left| \alpha_{ab}\alpha_{a'b'} \xi_{a'}^{-(-j+i)} \mathcal{C}_{b'}^u \mathcal{C}_{b'-u}^v \mathcal{C}_{b'-u-v}^w \right| \times$$

$$\underbrace{|\xi_a|^{-h}\,(h-j+i)^{b'-u-v-w}}_{\xrightarrow[h\to\infty]{} 0} \underbrace{\sum_{r=0}^{j-i+h-1} |a_r|\,|\xi_a|^{-r}\, r^w}_{<\infty} \underbrace{\sum_{r'=0}^{h-j+i} |a'_r|\,|\xi_a|^{r'}\, r'^v}_{<\infty} \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} l^{b+u}\,|\xi_a|^{-l}}_{<\infty}$$

Donc $(**) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$ et ④ $\xrightarrow[h\to\infty]{} 0$.
⑤ et ⑥ sont des restes d'une série convergente donc $\xrightarrow[h\to\infty]{} 0$.

Donc $\gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$ et $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial\theta_1} h(U_t) \xrightarrow{P} 0$.

On obtient de même $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(U_t) \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,q.$

Montrons enfin que $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\sigma}h(U_t) \xrightarrow{P} E\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}h(U_t)\right]$.

Posons

$$X_t = \frac{\partial}{\partial\sigma}h(U_t) = -\frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)h'(x)\Big|_{x=2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1}\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right) \overset{N}{=} f(\epsilon_t) \tag{1.22}$$

On a ici que $\{X_t\}$ est une suite de variables aléatoires $i.i.d$ de moyenne

$$E[X_t] = E\left[f(\epsilon_t)\right] = -\frac{1}{\sigma}b_k \tag{1.23}$$

et de variance

$$V(X_t) = V\left(f(\epsilon_t)\right) < \infty. \tag{1.24}$$

La loi faible des grands nombres permet alors d'écrire $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\sigma}h(U_t) \xrightarrow{P} -\frac{1}{\sigma}b_k$.

Annexe 7

Valeurs approchées des $b_k,\ k = 1, \ldots, 10$ de (3.13)

Les valeurs des $b_k,\ k = 1, \ldots, 10$ obtenues par intégration numérique à l'aide du logiciel *Mathematica* sont

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 1.23281$$

$$b_3 = 0$$

$$b_4 = 0.521125$$

$$b_5 = 0$$

$$b_6 = 0.304514$$

$$b_7 = 0$$

$$b_8 = 0.205589$$

$$b_9 = 0$$

$$b_{10} = 0.150771$$

Annexe 8

Calcul de $E[BV_t]$ et $Var[BV_t]$

$$E[BV_t] = BE[V_t] \tag{1.25}$$

On va montrer que $E[V_t] = 0$

$$E[V_t] = \left[\overset{E[h(U_t)]}{E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underbrace{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underbrace{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)\right)\right]} \right] \tag{1.26}$$

On a

$$Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underbrace{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underbrace{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)\right)$$
$$= -Log\sigma - Log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)'} \underbrace{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)'} \underbrace{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)^2.$$

D'où

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}} Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\,\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}-\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\,\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)\right)\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left[-Log\sigma-Log\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\,\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}-\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\,\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)^2\right]\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{\epsilon_t}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left[\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\,\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}+\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\,\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}\right]\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{\epsilon_t}{\sigma^2}\left[\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)},\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right)\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y_{t-1-r}^{(q)}}\right]
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}} Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\,\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}-\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\,\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)\right)\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}}\left[-Log\sigma-Log\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime}\,\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}-\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\,\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)^2\right]\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{\epsilon_t}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}}\left[\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\,\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}\right]\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{\epsilon_t}{\sigma^2}\left[\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}}\left(\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)},\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right)\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y_{t-r-1}^{(q)}}\right]
\end{aligned}
$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} Log \left(\frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-Log\sigma - Log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left(\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma} \right)^2 - 1 \right)$$

On voit donc que $E[V_t] = 0$.

Il reste à calculer $Var(V_t)$. On a

$$V_t = \left[h(U_t) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \left[Log \left(\frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{Y_t - \underset{\sim}{\varphi}^{(p)\prime} \underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}} - \underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime} \underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma} \right) \right) \right] \right]' \tag{1.27}$$

d'où

$$Var[V_t] =$$

$$\begin{bmatrix} Var[h(U_t)] & Cov\left(h(U_t), \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \left[Log \left(\frac{1}{\sigma} \phi \left(\ldots \right) \right) \right] \right)' \\ Cov\left(h(U_t), \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \left[(\ldots) \right] \right) & Var\left(\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \left[(\ldots) \right] \right) \end{bmatrix}$$

Or

$$Var[h(U_t)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} h(x)^2 \, dx = 1 \tag{1.28}$$

car

$$E[h(U_t)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} h(x) \, dx = 0 \tag{1.29}$$

(Propriétés des polynômes de Legendre normalisés sur [-1,1]).

Donc

$$
\begin{aligned}
&Cov\left(h(U_t), \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\ldots\right)\right)\right]\right)\\
&\qquad = E\left[h(U_t).\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\ldots\right)\right)\right]\right] \qquad \text{(car } E\left[h(U_t)\right]=0\text{)}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{bmatrix} E\left[h(U_t)\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\ldots\right)\right)\right]\right] \\ E\left[h(U_t)\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\ldots\right)\right)\right]\right] \\ E\left[h(U_t)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\ldots\right)\right)\right]\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left[h\left(2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1\right)\frac{\epsilon_t}{\sigma^2}\right]\underbrace{E\left[\mathcal{Y}_{\varphi,\delta,\theta,Y}\right]}_{=0} \\ E\left[h\left(2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1\right)\frac{\epsilon_t}{\sigma^2}\right]\underbrace{E\left[\mathcal{E}_{\epsilon_t,\delta,\theta,Y}\right]}_{=0} \\ \underbrace{E\left[h\left(2\Phi\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)-1\right)\frac{1}{\sigma}\left(\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma}\right)^2-1\right)\right]}_{=\frac{1}{\sigma}b_k} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma}b_k \end{bmatrix} \overset{N}{=} J
$$

où l'on a posé

$$
\mathcal{Y}_{\varphi,\delta,\theta,Y,t} = \underset{\sim}{Y}_{t-1}^{(p)} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}\left(\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right)\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}_{t-1-r}^{(q)} \tag{1.30}
$$

et

$$
\mathcal{E}_{\epsilon,\delta,\theta,Y,t} = \underset{\sim}{\epsilon}_{t-1}^{(q)} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}^{(q)}}\left(\delta_r\left(\underset{\sim}{\theta}^{(q)}, \underset{\sim}{\varphi}^{(p)}\right)\right)\underset{\sim}{\theta}^{(q)\prime}\underset{\sim}{Y}_{t-r-1}^{(q)} \tag{1.31}
$$

$$Var\left(\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Y_t-\underset{\sim}{\varphi}^{(p)'}\underset{\sim}{Y_{t-1}^{(p)}}-\underset{\sim}{\theta}^{(q)'}\underset{\sim}{\epsilon_{t-1}^{(q)}}}{\sigma}\right)\right)\right]\right)\overset{N}{\equiv}I_{\underset{\sim}{\beta}}$$

$$=E\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi(\dots)\right)\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}\left[Log\left(\frac{1}{\sigma}\phi(\dots)\right)\right]\right]'$$

$$=\begin{bmatrix}\underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}(\dots)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}(\dots)\right]'}_{\frac{1}{\sigma^2}Var\left[\mathcal{Y}_{\varphi,\delta,\theta,Y,t}\right]} & \dots & \dots\\ \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\theta}^{(q)}}(\dots)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}(\dots)\right]'}_{\frac{1}{\sigma^2}E\left[\mathcal{E}_{\epsilon,\delta,\theta,Y,t}\mathcal{Y}'_{\varphi,\delta,\theta,Y,t}\right]} & \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\theta}^{(q)}}(\dots)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\theta}^{(q)}}(\dots)\right]'}_{\frac{1}{\sigma^2}Var\left[\mathcal{E}_{\epsilon,\delta,\theta,Y,t}\right]} & \dots\\ \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}(\dots)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}}(\dots)\right]'}_{0} & \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}(\dots)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\theta}^{(q)}}(\dots)\right]'}_{0} & \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}(\dots)\right]^2}_{\frac{2}{\sigma^2}}\end{bmatrix}.$$

On peut écrire

$$I_{\underset{\sim}{\beta}}\overset{N}{\equiv}\begin{bmatrix}\underset{p\times p}{A} & \underset{p\times q}{B'} & 0\\ \underset{q\times p}{B} & \frac{1}{\sigma^2}Var\left[\mathcal{E}_{\epsilon,\delta,\theta,Y,t}\right] & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sigma^2}\end{bmatrix}$$

$$\overset{N}{\equiv}\begin{bmatrix}\underset{(p+q)\times(p+q)}{C} & 0\\ 0 & \frac{2}{\sigma^2}\end{bmatrix}$$

et

$$Var(V_t)=\begin{bmatrix}1 & J'\\ J & I_{\underset{\sim}{\beta}}\end{bmatrix}\tag{1.32}$$

D'où

$$BVar(V_t)B'=1-J'I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}J\tag{1.33}$$

où

$$J' I_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} J =$$

$$\begin{pmatrix} \underset{1\times(p+q)}{0} & \underset{1\times 1}{\frac{1}{\sigma} b_k} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underset{(p+q)\times(p+q)}{C^{-1}} & \underset{(p+q)\times 1}{0} \\ \underset{1\times(p+q)}{0} & \frac{\sigma^2}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underset{(p+q)\times 1}{0} \\ \underset{1\times 1}{\frac{1}{\sigma} b_k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underset{1\times(p+q)}{0} & \underset{1\times 1}{\frac{b_k \sigma}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{(p+q)\times 1}{0} \\ \underset{1\times 1}{\frac{1}{\sigma} b_k} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} b_k^2$$

Annexe 9

Expression de ϵ_t en fonction de $\underset{\sim}{\varphi}^{(p)}$, $\underset{\sim}{\theta}^{(q)}$ et des Y_{t-i} $i = 0, 1, \ldots$

On a

$$-\left(\sum_{i=0}^{p} \varphi_i B^i\right) Y_t = \left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i B^i\right) \epsilon_t \tag{1.34}$$

d'où

$$\epsilon_t = -\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i B^i\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{p} \varphi_i B^i\right) Y_t \tag{1.35}$$

soit

$$\epsilon_t = -\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} \gamma_r \varphi_i Y_{t-r-i} = -\sum_{r=0}^{\infty} \delta_r Y_{t-r} \tag{1.36}$$

Les $\{\gamma_r\}$ sont obtenus par la résolution du système

$$\begin{cases} 1 = \theta_0 \gamma_0 = \gamma_0 \\ 0 = \theta_0 \gamma_1 + \theta_1 \gamma_0 = \gamma_1 + \theta_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ 0 = \theta_0 \gamma_{q-1} + \cdots + \theta_{q-1} \gamma_0 \end{cases} \tag{1.37}$$

soit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \theta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \theta_2 & \theta_1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \theta_1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \theta_{q-1} & \theta_{q-2} & \theta_{q-3} & \dots & \theta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_{q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

et

$$0 = \theta_0 \gamma_t + \cdots + \theta_q \gamma_{t-q} \qquad t = q, q+1, \dots \tag{1.39}$$

c'est à dire

$$\gamma_t = -(\theta_1 \gamma_{t-1} + \cdots + \theta_q \gamma_{t-q}) \qquad t = q, q+1, \dots \tag{1.40}$$

Si les racines de l'équation $\sum_{r=0}^{q} \theta_r x^{q-r} = 0$ sont différentes, la solution générale du système précédent est

$$\gamma_r = \sum_{i=1}^{q} k_i x_i^r \qquad r = 0, 1, \dots \tag{1.41}$$

A l'aide des q premières équations on peut déterminer $\gamma_0, \dots, \gamma_{q-1}$, ce qui nous donne q équations linéaires indépendantes en les paramètres inconnus $k_1, \dots, k_q$, permettant de les déterminer de façon unique.

Les $x_1, \dots, x_q$ sont les racines de $\sum_{r=0}^{q} \theta_r x^{q-r} = 0$ et les $\{\delta_r\}$ sont obtenus par la résolution du système

$$\begin{cases} \delta_0 = \gamma_0 \varphi_0 \\ \delta_1 = \gamma_0 \varphi_1 + \gamma_1 \varphi_0 \\ \qquad \vdots \\ \delta_{p-1} = \gamma_0 \varphi_{p-1} + \gamma_1 \varphi_{p-2} + \cdots + \gamma_{p-1} \varphi_0 \end{cases} \tag{1.42}$$

soit matriciellement

$$
\begin{bmatrix}
\varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\
\varphi_1 & \varphi_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{p-1} & \varphi_{p-2} & \dots & \varphi_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\gamma_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_{p-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\delta_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{p-1}
\end{bmatrix}
\tag{1.43}
$$

et

$$
\delta_r = \gamma_{r-p}\varphi_p + \gamma_{r-p+1}\varphi_{p-1} + \dots + \gamma_r\varphi_0 \qquad r = p, p+1, \dots \tag{1.44}
$$

Si on dispose des observations $Y_{1-p}, \dots, Y_T$, on prendra alors pour estimer ϵ_t

$$
\hat{\epsilon}_t = \begin{cases} -\sum_{r=0}^{t+p-1} \hat{\delta}_r Y_{t-r} & \text{si } t \geqslant 1-p \\ 0 & \text{si } t < 1-p \end{cases} \tag{1.45}
$$

ce qui nécessite le calcul de $\hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_{T+p-2}$ qui eux nécessitent de connaître $\hat{\gamma}_0, \dots, \hat{\gamma}_{T+p-2}$ pour pouvoir obtenir $\hat{\epsilon}_{1-q}, \dots, \hat{\epsilon}_{T-1}$.

Annexe 10

Les programmes informatiques

Cette annexe présente tous les programmes utilisés pour effectuer les simulations informatiques réalisées avec le logiciel *Splus*.

CALCUL

Ce programme calcule la puissance de la statistique du test pour toutes les lois "N(0,1)", "Khi-deux(2)", "Student(5)", "Skew-Normale(2)", "Log-Normale(0,1)" et "Laplace", ceci pour tous les modèles ARMA(p,q) où p et q prennent n'importe quelle valeur dans $\{0, 1, 2\}$, pour un nombre k de polynômes de Legendre avec $k \in \{1, \ldots, 10\}$ et pour les nombres d'observations T=20, 35, 50 et 100. Il renvoie aussi les quantiles si la loi est N(0,1). Le nombre d'itérations pour chaque calcul de puissance est 1000.

Les paramètres des modèles ARMA sont donnés par les arguments *phi* et *teta* appelés par le programme TEST (qu'il faut donc changer si besoin est à l'intérieur du programme CALCUL). Le seuil de signification est $\alpha = 0.1$.

Les résultats du calcul sont envoyés par mail à leur propriétaire. Pour cela, il faut (sous Unix) créer un fichier appelé *com1.s* contenant le code suivant:

```
CALCUL(1,2)
q()
```

et un fichier *com2.s* contenant le code:

```
CALCUL(3,1)
q()
```

par exemple, si l'on veut faire le calcul pour la loi N(0,1) avec 35 observations et pour la loi Student(5) avec 20 observations.

Puis il faut créer le fichier Unix *script* contenant le code:

```
\Splus<com1.s>res1.s
cat res1.s | mail plafaye@club-internet.fr
\Splus<com1.s>res2.s
cat res2.s | mail plafaye@club-internet.fr
```

Puis il faut taper sous la fenêtre xterm d'Unix:

```
chmod +x script
```

pour rendre le programme *script* exécutable, et enfin taper *./script* pour lancer le programme.

Le programme *CALCUL* est:

```
CALCUL<-function(var1,var2)


#Entrees:
#-------
var1: correspond a la loi
var2: correspond au nombre d'observations

#Fonctions exterieures appelees:
#------------------------------
TEST


{


m<-216

X<-list(1,2,3,4,5,6)

names(X)<-list("N(0,1)","Chi2(2)","Student(5)","SN(2)",
"Log-Normale","Laplace")

for (i in 1:6) {X[[i]]<-list(1,2,3,4)

names(X[[i]])<-list("nT=20","nT=35","nT=50",
"nT=100")

for (j in 1:4) {X[[i]][[j]]<-list(1,2,3)

names(X[[i]][[j]])<-list("p=2","p=1","p=0")

for (k in 1:3) {X[[i]][[j]][[k]]<-list(1,2,3)

names(X[[i]][[j]][[k]])<-list("q=2","q=1",
"q=0")}}}

for (i in var1:var1) {
```

```
for (j in var2:var2) {

for (k in 1:3) {

for (l in 1:3) {#cat(m);cat(" ");m<-m-1

if (j==1) nT<-20
if (j==2) nT<-35
if (j==3) nT<-50
if (j==4) nT<-100

X[[i]][[j]][[k]][[l]]<-TEST(p=(3-k),q=(3-l),n=1000,nT=nT,
phi=c(0.1,0.8),teta=c(0.4,0.5),K=10,loi=(i-1),alpha=0.1,
sigma=1,
df1=2,df2=5,lambda=2,u=1)

print(X[[i]][[j]][[k]][[l]])

cat("################################################
############################\n")}}}}

}
```

TEST

```
TEST<-function(p=2,q=2,n=1000,nT=100,phi=c(0.1,0.8),
teta=c(0.4,0.5),K=10,loi=0,alpha=0.1,sigma=1,df1=2,df2=5,
lambda=2,u=0)

#Description:
#-----------

#Ceci est le programme qui calcule la puissance du test mis au
#point dans mon memoire, dont l'hypothese
#nulle est Ho: Eps suit une N(0,sigma2) ou Eps est le
#bruit blanc d'un modele ARMA(p,q).
#Il genere nT+p donnees provenant d'un modele ARMA(p,q)
#de parametres phi et teta et dont la loi du bruit blanc
#est donnee en parametre,
#puis il calcule la statistique du test pour un nombre
#k de polynomes de Legendre (pour tout k=1,...,10)
#et la compare au quantile du Chi2 correspondant.
#Le modele genere est:
#Y(t)-sum[i=1,i=p]phi(i)Y(t-i)=sum[j=1,j=q]teta(j)eps(t-j)+
eps(t).
#On recommence n fois et on calcule ainsi la puissance du test
#soit le nombre de fois ou on a rejete
#l'hypothese nulle divise par n (exprimee en %),
#ainsi que les quantiles de la loi de la statistique et
#ceci pour chaque valeur de k.


#Entrees:
#-------

#p,q: ordres du modele ARMA
#n:nombre de statistiques calculees
#nT+p:nombre d'observations du modele ARMA a notre disposition
# (dont p pour amorcer les recurrences)
#phi, teta: parametres du modele ARMA
#K: ordre de la famille d'emboitement
#alpha: niveau du test
#sigma: ecart type du bruit blanc
#df1: nombre de degres de liberte de la Chi2 a tester
```

```
#df2: nombre de degres de liberte de la Student a tester
#lambda: parametre de la Skew-Normale a tester
#loi:loi a tester:
# si loi=0 : Normale(0,sigma^2)
# si loi=1 : Chi2 centree (df1)
# si loi=2 : Student (df2)
# si loi=3 : Skew-Normale(lambda)
# si loi=4 : Log-Normale
# si loi=5 : Laplace
#ATTENTION: on change teta en -teta car le modele simule par
#Splus
#n'est pas le meme que le mien.
#u:si u=0:indicateur d'avancement du programme actif

#Sorties:
#-------

#n
#nT
#p
#q
#phi
#teta
#K
#alpha
#loi testee
#Puiss[k] (k=1,...,K)
#Quant[k] (k=1,...,K): quantile de la loi de la statistique
#sous H0
#pour k polynomes de Legendre et au niveau alpha


#Fonctions exterieures appellees:
#-------------------------------

#rand.gen
#H1,H2,...,H10
#arima.sim (fonction de Splus)
#arima.mle (fonction de Splus modifiee)
```

```
# Pierre LAFAYE DE MICHEAUX (Avril 1998)


#-------------------------------------------------------------

# DEBUT DU PROGRAMME
#-------------------------------------------------------------


{


#Protection des erreurs:
#----------------------

if ((p == 1) & (length(phi) == 2)) {phi<-phi[2]}
if ((q ==1) & (length(teta) == 2)) {teta<-teta[1]}

if (length(teta) > 0) {teta<--teta}
#car le modele genere par la fonction Splus arima.sim
#n'est pas le meme que dans mon memoire

if (p == 0) {phi<-c()}
if (q == 0) {teta<-c()}

if (p < 0) {return("p doit etre positif ou nul")}
if ((trunc(p)) != p) {return("p doit etre entier")}

if (q < 0) {return("q doit etre positif ou nul")}
if ((trunc(q)) != q) {return("q doit etre entier")}

if (n < 2) {return("n doit etre > 1")}
if ((trunc(n)) != n) {return("n doit etre entier")}

if ((nT < 0) | (nT == 0)) {return("nT doit etre > 0")}
if ((trunc(nT)) != nT) {return("nT doit etre entier")}


if (length(phi) != p) {return("phi doit avoir meme longueur
que p")}
```

```
if (length(teta) != q) {return("teta doit avoir meme longueur
 que q")}

if ((K < 0) | (K == 0)) {return("K doit etre > 0")}
if ((trunc(K)) != K) {return("K doit etre entier")}
if (K > 10) {return("Il faut definir Hk pour k>10 et
completer b~K et la table du Chi2 dans le programme")}

if ((loi != 0) & (loi != 1) & (loi != 2) & (loi != 3) &
(loi !=4) & (loi != 5)) {return("Loi de eps pas definie:
a rajouter dans le programme")}

if ((alpha != 0.1) & (alpha != 0.05)) {return("alpha doit
etre 0.1 ou 0.05")}

if ((sigma < 0) | (sigma == 0)) {return("sigma doit etre >0")}

if (df1 < 1) {return("df1 doit superieur ou egal a 1")}
if ((trunc(df1)) != df1) {return("df1 doit etre entier")}

if (df2 < 1) {return("df2 doit superieur ou egal a 1")}
if ((trunc(df2)) != df2) {return("df2 doit etre entier")}


#Definition de la loi a tester:
#----------------------------

if (loi == 0) {loiteste<-paste("Normale(0,",
format(sigma^2),")",sep="")}
if (loi == 1) {loiteste<-paste("Chi2(",format(df1),")",
" (centree)",sep="")}
if (loi == 2) {loiteste<-paste("Student a ",format(df2),
" degres de liberte",sep="")}
if (loi == 3) {loiteste<-paste("Skew-Normale(",format(lambda)
,")",sep="")}
if (loi == 4) {loiteste<-"Log-Normale"}
if (loi == 5) {loiteste<-"Laplace"}

#vecteur b~K du memoire (pour K=10):
#----------------------------------
```

```
bK<-c(0,1.23281,0,0.521125,0,0.304514,0,0.205589,0,0.150771)

#table des quantiles de la loi du Chi2 (K=10;alpha=0.1 et 0.05):
#---------------------------------------------------------------

x1<-c(2.71,4.61,6.25,7.78,9.24,10.64,12.02,13.36,14.68,15.99)

x2<-c(3.84,5.99,7.81,9.49,11.07,12.59,14.07,15.51,16.92,18.31)

chi<-matrix(c(x1,x2),nrow=10,ncol=2,byrow=F)

if (alpha == 0.1) {alph<-1}
if (alpha == 0.05) {alph<-2}


#ON VA CALCULER n FOIS LA STATISTIQUE DU TEST DANS CHACUN DES CAS:
#       AR(p), MA(q), ARMA(p,q) et ARMA(0,0)
#--------------------------------------------------------------
#--------------------------------------------------------------

#compt:compteur qui comptabilise le nombre de rejets
#de l'hypothese nulle Ho:Eps suit N(0,sigma2)
compt<-rep(0,K)

#statn: matrice dont la ieme ligne est [stat[1],...,stat[K]]
#pour le calcul de la ieme statistique
statn<-matrix(rep(0,n*K),nrow=n,ncol=K)

#M: matrice qui intervient dans le calcul de la statistique

M<-list(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

names(M)<-1:10

for (k in 1:K) {

M[[k]]<-solve(diag(rep(1,k))-0.5*as.matrix(bK[1:k])%*%
t(as.matrix(bK[1:k])))}
```

```
#/////////////////////////////
#Cas q=0 et p>0:modele AR(p) //
#/////////////////////////////

if ((q == 0) & (p>0)) {

for (j in 1:n)

{if (u==0) {cat(n-j);cat(" ")} #indicateur
    #d'avancement du programme

#On simule les donnees:
#--------------------

#donnees=[Y(1-p),...,YT]

modele<-list(ar=phi)

donnees<-arima.sim(n=(nT+p),model=modele,innov=
rand.gen(nT+p,loi,sigma,df1,df2,lambda))


#On estime les parametres:
#-----------------------

estime<-arima.mle(donnees,model=modele)

phichap<-estime$ar

sigchap2<-estime$sigma2

#On calcule la statistique du test:
#--------------------------------


#C=[Y1,...,YT]

C<-donnees[(p+1):(nT+p)]


#A=[Y(1-1)~|Y(2-1)~|...|Y(T-1)~]
```

```
A<-matrix(rep(0,p*(2*p+nT-2)),nrow=p,ncol=(2*p+nT-2))

don<-donnees[1:(nT+p-1)]

for (i in 1:p) {A[i,]<-c(rep(0,(i-1)),don,rep(0,(p-i)))}

A<-A[,(p:(nT+p-1))]


#b=phichap~(p)

b<-as.matrix(phichap)

G<-t(b)%*%A


#Calcul de Ut:

Z<-as.matrix(C)-t(G)

D<-Z/sqrt(sigchap2)

E<-pnorm(D)

#U=[U1,...,UT]

U<-2*E-1

#hK' c'est le h~Kchap du memoire:

hU<-matrix(rep(0,K*nT),nrow=nT,ncol=K)

for (i in 1:K)

{hU[,i]<-eval(parse(text=paste("H",format(i),"(U)",
sep="")))}

hK<-apply(hU,2,sum)/sqrt(nT)
```

```
#M: matrice qui intervient dans la variance de la statistique:
#stat[k]:c'est la statistique du test pour
#un nombre k de polynomes de Legendre

stat<-rep(0,K)

for (k in 1:K) {

stat[k]<-t(as.matrix(hK[1:k]))%*%M[[k]]%*%as.matrix(hK[1:k])

if (stat[k]>chi[k,alph]) compt[k]<-compt[k]+1

}

statn[j,]<-stat

} #ferme la boucle


} #ferme le if

#//////////////////////////////
#Cas p=0 et q>0:modele MA(q) //
#//////////////////////////////

if ((p == 0) & (q>0)) {

for (j in 1:n)

{if (u==0) {cat(n-j);cat(" ")} #indicateur
  #d'avancement du programme

#On simule les donnees:
#---------------------

#donnees=[Y1,...,YT]

modele<-list(ma=teta)

donnees<-arima.sim(n=nT,model=modele,innov=rand.gen(nT,loi,
sigma,df1,df2,lambda))
```

```
#On estime les parametres:
#------------------------

estime<-arima.mle(donnees,model=modele)

tetachap<-(-estime$ma)

sigchap2<-estime$sigma2


#On estime epsilont(teta) pour t=1-q,...,T-1
#pour cela:calcul des gammar necessaires
#gamma=[gamma0,...,gamma(T-2)]

 #Calcul des gammar (r=0,...,T-2):

gamma<-rep(0,(nT-1))

if (q==1) { gamma[1]<-1

for (j in 2:(nT-1))

{gamma[j]<--tetachap*gamma[j-1]}

 }

if (q==2) {gamma[1]<-1

 gamma[2]<--tetachap[1]

 for (j in 3:(nT-1))

    {gamma[j]<-sum(-tetachap*rev(gamma[(j-2):(j-1)]))}

 }

if (q>2) {vect<-c(1,rep(0,(q-1)))

b<-c(1,tetachap[1:(q-1)])
```

```
for (i in 2:(q-1)) {a<-c(rep(0,(i-1)),1,
tetachap[1:(q-i)])

b<-c(b,a)

  }

b<-c(b,rep(0,(q-1)),1)

A<-matrix(b,nrow=q,ncol=q,byrow=F)

gamma[1:q]<-solve(A,vect)

for (j in (q+1):(nT-1))

    {gamma[j]<-sum(-tetachap*rev(gamma[(j-q):(j-1)]))}

 }

 #epschap=[epschap(1-q),...,epschap(T-1)]:

epschap<-rep(0,(q+nT-1))

for (i in (q+1):(q+nT-1))

 {epschap[i]<-sum(gamma[1:(i-q)]*rev(donnees[1:(i-q)]))}



#On calcule la statistique du test:
#---------------------------------


#C=[Y1,...,YT]

C<-donnees


#B=[epschap(1-1)~|epschap(2-1)~|...|epschap(T-1)~]
```

```
B<-matrix(rep(0,q*(2*q+nT-2)),nrow=q,ncol=(2*q+nT-2))

for (i in 1:q) {B[i,]<-c(rep(0,(i-1)),epschap,rep(0,(q-i)))}

B<-B[,(q:(nT+q-1))]


#d=tetachap~(q)

d<-as.matrix(tetachap)

H<-t(d)%*%B


#Calcul de Ut:

Z<-as.matrix(C)-t(H)

D<-Z/sqrt(sigchap2)

E<-pnorm(D)

#U=[U1,...,UT]

U<-2*E-1

#hK' c'est le h~Kchap du memoire:

hU<-matrix(rep(0,K*nT),nrow=nT,ncol=K)

for (i in 1:K)

{hU[,i]<-eval(parse(text=paste("H",format(i),"(U)",
sep="")))}

hK<-apply(hU,2,sum)/sqrt(nT)


#M: matrice qui intervient dans la variance de la statistique:
#stat[k]:c'est la statistique du test pour
#un nombre k de polynomes de Legendre
```

```
stat<-rep(0,K)

for (k in 1:K) {

stat[k]<-t(as.matrix(hK[1:k]))%*%M[[k]]%*%as.matrix(hK[1:k])

if (stat[k]>chi[k,alph]) compt[k]<-compt[k]+1

}

statn[j,]<-stat

} #fin de la boucle

teta<--teta
} #fin du if


#/////////////////////////////////
#Cas p>0 et q>0:modele ARMA(p,q) //
#/////////////////////////////////

if ((p>0) & (q>0)) {


for (j in 1:n)

{if (u==0) {cat(n-j);cat(" ")} #indicateur
  #d'avancement du programme

#On simule les donnees:
#--------------------

#donnees=[Y(1-p),...,YT]

modele<-list(ma=teta,ar=phi)

donnees<-arima.sim(n=(nT+p),model=modele,innov=
rand.gen(nT+p,loi,sigma,df1,df2,lambda))
```

```
#On estime les parametres:
#------------------------

estime<-arima.mle(donnees,model=modele)

phichap<-estime$ar

tetachap<-(-estime$ma)

sigchap2<-estime$sigma2


#On estime epsilont(phi,teta) pour t=1-q,...,T-1
#pour cela:calcul des gammar et des deltar necessaires
#gamma=[gamma0,...,gamma(T+p-2)]
#delta=[delta0,...,delta(T+p-2)]


 #Calcul des gammar (r=0,...,T+p-2):

gamma<-rep(0,(nT+p-1))

if (q==1) { gamma[1]<-1

 for (j in 2:(nT+p-1))

{gamma[j]<--tetachap*gamma[j-1]}

 }

if (q==2) {gamma[1]<-1

 gamma[2]<--tetachap[1]

 for (j in 3:(nT+p-1))

    {gamma[j]<-sum(-tetachap*rev(gamma[(j-2):(j-1)]))}

 }
```

```
if (q>2) {vect<-c(1,rep(0,(q-1)))

b<-c(1,tetachap[1:(q-1)])

 for (i in 2:(q-1)) {a<-c(rep(0,(i-1)),1,tetachap[1:(q-i)])

b<-c(b,a)

  }

b<-c(b,rep(0,(q-1)),1)

A<-matrix(b,nrow=q,ncol=q,byrow=F)

gamma[1:q]<-solve(A,vect)

for (j in (q+1):(nT+p-1))

    {gamma[j]<-sum(-tetachap*rev(gamma[(j-q):(j-1)]))}

 }


 #Calcul des deltar:

delta<-rep(0,(nT+p-1))

if (p==1) {delta[1]<--1

 for (j in 2:(nT+p-1))

   {delta[j]<-sum(c(-1,phichap)*rev(gamma[(j-1):j]))}}

if (p==2) {delta[1]<--1

 delta[2]<-phichap[1]-gamma[2]

for (j in 3:(nT+p-1))

   {delta[j]<-sum(c(-1,phichap)*rev(gamma[(j-2):j]))} }
```

```
if (p>2) {

b<-c(-1,phichap[1:(p-1)])

for (i in 2:(p-1)) {a<-c(rep(0,(i-1)),-1,phichap[1:(p-i)])

 b<-c(b,a)

 }

b<-c(b,rep(0,(p-1)),-1)

A<-matrix(b,nrow=p,ncol=p,byrow=F)



delta[1:p]<-A%*%as.matrix(gamma[1:p])

for (j in (p+1):(nT+p-1))

{delta[j]<-sum(c(-1,phichap)*
rev(gamma[(j-p):j]))}}

 #epschap=[epschap(1-q),...,epschap(T-1)]:

epschap<-rep(0,(q+nT-1))

if (p < q) {for (i in (q-p+1):(q+nT-1))

 {epschap[i]<-sum(-delta[1:(i+p-q)]*
rev(donnees[1:(i+p-q)]))}}

if ((p>q) | (p ==q)) {for (i in 1:(q+nT-1))

 {epschap[i]<-sum(-delta[1:(i+p-q)]*
rev(donnees[1:(i+p-q)]))}}


#On calcule la statistique du test:
#--------------------------------
```

```
#C=[Y1,...,YT]

C<-donnees[(p+1):(nT+p)]


#A=[Y(1-1)~|Y(2-1)~|...|Y(T-1)~]

A<-matrix(rep(0,p*(2*p+nT-2)),nrow=p,ncol=(2*p+nT-2))

don<-donnees[1:(nT+p-1)]

for (i in 1:p) {A[i,]<-c(rep(0,(i-1)),don,rep(0,(p-i)))}

A<-A[,(p:(nT+p-1))]


#b=phichap~(p)

b<-as.matrix(phichap)

G<-t(b)%*%A


#B=[epschap(1-1)~|epschap(2-1)~|...|epschap(T-1)~]

B<-matrix(rep(0,q*(2*q+nT-2)),nrow=q,ncol=(2*q+nT-2))

for (i in 1:q) {B[i,]<-c(rep(0,(i-1)),epschap,rep(0,(q-i)))}

B<-B[,(q:(nT+q-1))]


#d=tetachap~(q)

d<-as.matrix(tetachap)

H<-t(d)%*%B


#Calcul de Ut:
```

```
Z<-as.matrix(C)-t(G)-t(H)

D<-Z/sqrt(sigchap2)

E<-pnorm(D)

#U=[U1,...,UT]

U<-2*E-1

#hK' c'est le h~Kchap du memoire:

hU<-matrix(rep(0,K*nT),nrow=nT,ncol=K)

for (i in 1:K)

{hU[,i]<-eval(parse(text=paste("H",format(i),"(U)",
sep="")))}

hK<-apply(hU,2,sum)/sqrt(nT)


#M: matrice qui intervient dans la variance de la statistique:
#stat[k]:c'est la statistique du test pour
#un nombre k de polynomes de Legendre

stat<-rep(0,K)

for (k in 1:K) {

stat[k]<-t(as.matrix(hK[1:k]))%*%M[[k]]%*%as.matrix(hK[1:k])

if (stat[k]>chi[k,alph]) compt[k]<-compt[k]+1

}

statn[j,]<-stat

} #fin de la boucle
```

```
teta<--teta
} #fin du if


#//////////////////////////////////
#Cas q=0 et p=0:modele ARMA(0,0) //
#//////////////////////////////////

if ((q == 0) & (p == 0)) {

for (j in 1:n)

{if (u==0) {cat(n-j);cat(" ")} #indicateur
    #d'avancement du programme

#On simule les donnees:
#---------------------

#donnees=[Y1,...,YT]

donnees<-rand.gen(nT,loi,sigma,df1,df2,lambda)

#On estime les parametres:
#------------------------

sigchap2<-sum(donnees^2)/nT

#On calcule la statistique du test:
#---------------------------------


#C=[Y1,...,YT]

C<-donnees[1:nT]


#Calcul de Ut:

Z<-as.matrix(C)

D<-Z/sqrt(sigchap2)
```

```
E<-pnorm(D)

#U=[U1,...,UT]

U<-2*E-1

#hK' c'est le h~Kchap du memoire:

hU<-matrix(rep(0,K*nT),nrow=nT,ncol=K)

for (i in 1:K)

{hU[,i]<-eval(parse(text=paste("H",format(i),"(U)",
sep="")))}

hK<-apply(hU,2,sum)/sqrt(nT)


#M: matrice qui intervient dans la variance de la statistique:
#stat[k]:c'est la statistique du test pour
#un nombre k de polynomes de Legendre

stat<-rep(0,K)

for (k in 1:K) {

stat[k]<-t(as.matrix(hK[1:k]))%*%M[[k]]%*%as.matrix(hK[1:k])

if (stat[k]>chi[k,alph]) compt[k]<-compt[k]+1

}

statn[j,]<-stat

} #fin de la boucle


} #fin du if

#ON TERMINE PAR LA PUISSANCE, LES QUANTILES, UN GRAPHIQUE
```

```
#               ET ON SORT LES VALEURS:
#--------------------------------------------------------------
#--------------------------------------------------------------



#On calcule la puissance du test en %:
#-----------------------------------

Puiss<-rep(0,K)

for (k in 1:K) {Puiss[k]<-compt[k]}

Puiss<-Puiss*100/n


#On calcule Quant si loi=N(0,1):
#------------------------------

if (loi==0) {

val<-floor(n/10)

statn<-apply(statn,2,sort)

Quant<-statn[n-val,]}


#On trace un graphique:
#--------------------

#plot(1:K,Puiss,xlab="valeur de k (k=1,...,K)",ylab=
"Puissance en %")
#title(paste("Loi testee: ",loiteste,"\n","n=",format(n),
" ; ","T=",format(nT)," ; ","alpha=",format(alpha),sep=""))

#On retourne les valeurs en sortie:
#---------------------------------

if (u==0) cat("\n")
```

```
if (loi==0){

return(n,nT,p,q,phi,teta,K,alpha,loiteste,Puiss,Quant)}

if (loi>0) {

return(n,nT,p,q,phi,teta,K,alpha,loiteste,Puiss)}

}
```

arima.mle

Ce programme est une modification de la version originale de la fonction arima.mle de *Splus* qui ne fonctionnait pas très bien.

```
arima.mle<-function(x, model = NULL, n.cond = 0, xreg = NULL, ...)

#J'ai du modifier la version originale arima.mle
#de Splus pour l'adapter a mes besoins

{
series.name <- deparse(substitute(x))
reg.series.name <- deparse(substitute(xreg))
if(is.matrix(x))
if(ncol(x) > 2)
stop("x is multivariate, it must
\n be univariate"
)
model <- .arima.S.to.C(model)
if(length(model$coefs) == 0)
stop("No AR or MA coeficients to fit")
no.miss <- !any(is.na(c(x, xreg)))
mle.pars <- .arima.bld.mle(model$model)
if(!is.null(xreg)) {
new.data <- .arima.bind.xreg(x, xreg)
x <- new.data$x
xreg <- new.data$xreg
}
save.x <- x
save.xreg <- xreg
if(sum(model$order[2,  ]) > 0 & no.miss) {
x <- .arima.diff(x, model)
if(!is.null(xreg))
xreg <- .arima.diff(xreg, model
)
model$order[2,  ] <- 0
}
x.clean <- .arima.clean.x(x, model$order, model$
period, xreg = xreg, n.cond = n.cond)
if(length(mle.pars$opt.p) != length(model$coef)
)
stop("length of opt.p is invalid")
```

```
arima.opt <- function(coef)
{
U.coefs[U.opt.p] <- coef
res <- .arima.like(U.x, U.model, coefs
 = U.coefs, trans.p = U.trans.p,
n.cond = U.n.cond)
if(length(res) > 1) {
assign("U.reg.coef", res$
reg.coef, frame = 1)
as.double(res$loglik)
}
else NA
}
assign("U.coefs", model$coef, frame = 1)
assign("U.model", model, frame = 1)
assign("U.trans.p", mle.pars$trans.p, frame = 1
)
assign("U.opt.p", mle.pars$opt.p, frame = 1)
assign("U.x", x.clean, frame = 1)
assign("U.n.cond", n.cond, frame = 1)
local.mle.pars <-  - mle.pars$trans.p
coef <- .arima.trans(local.mle.pars, model$
order, model$period, model$coefs)
if(any(is.na(coef)))
stop("Bad starting coefficients")
opt <- nlmin(arima.opt, coef[mle.pars$opt.p],
...)
coef[mle.pars$opt.p] <- opt$x
opt$x <- NULL
coef <- .arima.trans(mle.pars$trans.p, model$
order, model$period, coef)
model <- .arima.C.to.S(coef, model$model)
filt <- arima.filt(save.x, model = model,
n.cond = n.cond, xreg = save.xreg,
reg.coef = U.reg.coef)[c("aic",
"loglik", "sigma2", "n.used", "n.cond")
]
#cov <- .arima.cov(model, filt$n.used)
if(length(model) == 1)
model <- model[[1]]
res <- c(model,filt)
```

```
strip.null(res)
}
```

rand.gen

```
rand.gen<-function(n,loi,sigma=1,df1=2,df2=5,lambda=2)

{

#simule selon la valeur du parametre loi un echantillon de taille n d'une:
#N(0,1) centree
#Khi-deux(df1) centree
#student(df2) centree
#Skew-Normale(lambda) centree
#Log-normale(0,1) centree
#Laplace(0,1) centree

if (loi == 0) {res<-rnorm(n)}

if (loi == 1) {res<-rchisq(n,df=df1)-df1}

if (loi == 2) {res<-rt(n,df=df2)}

if (loi == 3) {res<-rskew(n,lambda)-
sqrt(2/pi)*(lambda/(sqrt(1+lambda*lambda)))}

if (loi == 4) {res<-rlnorm(n)-exp(0.5)}

if (loi == 5) {res<-rlap(n)}

return(res)

}
```

rlap

```
rlap<-function(n)

#simule un echantillon de taille n
#provenant d'une loi de Laplace

{

U<-runif(n)

X<-rep(0,n)

X[(U<0.5)|(U==0.5)]<-log(2*U[(U<0.5)|(U==0.5)])

X[U>0.5]<--log(2*(1-U[U>0.5]))

return(X)

}
```

rskew

```
rskew<-function(n,lambda)

{

Z<-rep(0,n)

Y<-rnorm(n)

W<-rnorm(n)

Z[lambda*Y>W]<-Y[lambda*Y>W]

Z[(lambda*Y<W) | (lambda*Y == W)]<-(-Y[(lambda*Y<W) |
(lambda*Y == W)])

return(Z)

}
```

H1

C'est le premier polynôme de Legendre.

```
H1<-function(x)

{

y<-sqrt(3)*x

return(y)

}
```

H2

C'est le deuxième polynôme de Legendre.

```
H2<-function(x)

{

y<-sqrt(5)*(3*x^2-1)/2

return(y)

}
```

H3

C'est le troisième polynôme de Legendre.

```
H3<-function(x)

{

y<-sqrt(7)*(5*x^3-3*x)/2

return(y)

}
```

H4

C'est le quatrième polynôme de Legendre.

```
H4<-function(x)

{

y<-3*(35*x^4-30*x^2+3)/8

return(y)

}
```

H5

C'est le cinquième polynôme de Legendre.

```
H5<-function(x)

{

y<-sqrt(11)*(63*x^5-70*x^3+15*x)/8

return(y)

}
```

H6

C'est le sixième polynôme de Legendre.

```
H6<-function(x)

{

y<-sqrt(13)*(231*x^6-315*x^4+105*x^2-5)/16

return(y)

}
```

H7

C'est le septième polynôme de Legendre.

```
H7<-function(x)

{

y<-sqrt(15)*(429*x^7-693*x^5+315*x^3-35*x)/16

return(y)

}
```

H8

C'est le huitième polynôme de Legendre.

```
H8<-function(x)

{

y<-sqrt(17)*(6435*x^8-12012*x^6+6930*x^4-1260*x^2+35)/128

return(y)

}
```

H9

C'est le neuvième polynôme de Legendre.

```
H9<-function(x)

{

y<-sqrt(19)*(12155*x^9-25740*x^7+18018*x^5-4620*x^3+315*x)/128

return(y)

}
```

H10

C'est le dixième polynôme de Legendre.

```
H10<-function(x)

{

y<-sqrt(21)*(46189*x^10-109395*x^8+90090*x^6-30030*x^4+
3465*x^2-63)/256

return(y)

}
```

Bibliographie

[1] T.W.Anderson (1972), *The Statistical Analysis of Time Series - Wiley series*

[2] A.Azzalini and A.Dalla Valle (1996), *The multivariate skew-normale distribution, Biometrika, 83,4,pp.715-726*

[3] Y.M.M.Bishop, S.E.Fienberg, P.W.Holland (1975), *Discrete Multivariate Analysis - Theory and practice*

[4] G.E.P.Box and G.M.Jenkins (1976), *Time series analysis, forecasting and control*

[5] P.J.Brockwell and R.A.Davis (1990), *Time Series: Theory and Methods - Second Edition*

[6] B.Coutrot et J.J.Droesbeke (1995), *Les Méthodes de Prévivion - Collection Que sais-je?*

[7] N.Davies, C.Triggs and P.Newbold (1977), *Significance levels of the Box-Pierce portmanteau statistic in finite samples - Biometrika, 46, 306-316*

[8] J.J.Droesbeke, B.Fichet, P.Tassi (1989), *Séries chronologiques - Théorie et pratique des modèles ARIMA*

[9] C.Gourieroux et A.Monfort (1995), *Séries temporelles et modèles dynamiques - Deuxième édition*

[10] J.Neyman (1937), *"Smooth" test for goodness of fit*

[11] D.Prothero and K.Wallis (1976), *Modelling macroeconomics time series - Journal of the Royal Statistical Society, A 468-500*

[12] R.J.Serfling (1980), *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*

[13] I.Templet (1995), *Test d'adéquation des résidus d'un modèle de régression - DEA - Montpellier*

Index